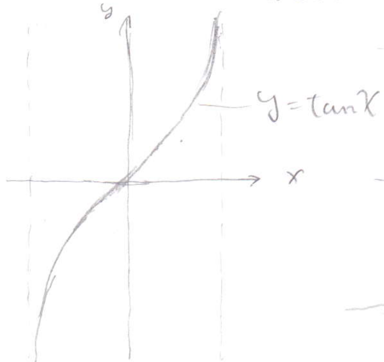
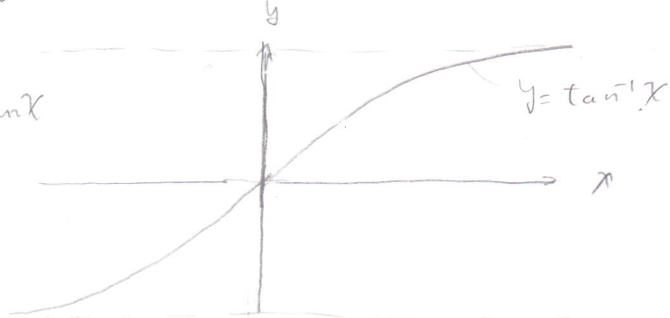
3) $\tan x$ は $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ で狭義単調増加、連続、値域 $\mathbb{R}$
その逆関数を $\tan^{-1}x$ や $\arctan x$ と書く。
$\tan^{-1}x$ は $\left\{ \begin{array}{l} \text{定義域 } \mathbb{R} \\ \text{値域 } (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \end{array} \right\}$ で、狭義単調増加、連続





④ 指数関数

$a>0$、$x \in \mathbb{R}$ に関して a^x を定義したい。
$q \in \mathbb{Q}$ のとき a^q は知っている。 $q = \frac{n}{m}$ のとき、$a^q = (a^n)^{\frac{1}{m}} = (a^{\frac{1}{m}})^n$
有理数全体　　$(n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N})$

補題 $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ に対して
$r_1 < r_2 < r_3 < \cdots\cdots r_n \to \alpha \ (n \to \infty) \cdots (*)$
となる有理数の列 $\{r_n\}$ が存在する。
∵ 有理数の稠密性より、$\forall n \in \mathbb{N}$、$\exists r_n \in \mathbb{Q}$ s.t.

$$\alpha - \frac{1}{n} < r_n < \alpha - \frac{1}{n+1}$$

この $\{r_n\}$ は $(*)$ をみたす。$(*)$ のとき $r_n \nearrow \alpha$ とかく。

手順(i) $a>1$ とする
$x \in \mathbb{R}$ とする $q_n \nearrow x \ (n \to \infty)$ となる有理数列 $\{q_n\}$ をとる。
$\{a^{q_n}\}$ は上に有界な増加列で収束する。
(∵ $x<b$ となる $b \in \mathbb{Q}$ に対して、$a^{q_n} < a^b$ だから
(有理数乗の単調性を用いた))
$a^x = \lim a^{q_n}$ と定義する

注 この値は $q_n \nearrow x$ となる有理数列 $\{q_n\}$ のとり方によらずに定まる。(確認必要)
(ii) $0<a<1$ のとき $a^x = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$ と定義する。(今 $\frac{1}{a} > 1$)
(iii) $1^x = 1$ とする。

このようにして $\mathbb{R}$ 上の関数 $y = a^x$ が定義される(指数関数)
狭義単調性、連続性、指数法則、$x \to \pm\infty$ での極限、グラフ(難波 例1.17など)
$a>1$ のとき　$a^x = \sup\{a^q \mid q \in \mathbb{Q}, q < x\}$ が成り立つ。
e:ネイピア数のとき、$e^x = \exp x$ と書くことがある。 $\left(\exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right) \text{など}\right)$

㊟ 対数関数

$a>0$, $a\neq 1$ のとき $y=a^x$ の逆関数を $y=\underline{\log_a x}$ $(x>0)$ と定義する。
↑対数関数

$\log_e x$ を $\log x$ と書く。

㊟ 双曲線関数 (記号) $\mathbb{R}$ 上の関数

$\underline{\sinh x}=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$, $\cosh x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$, $\tanh x=\dfrac{\sinh x}{\cosh x}=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

↑ハイパボリックサインとよぶ。

例 関数の極限として、

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ (2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ (3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

(4) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\log(1+h)}{h}=1$ (5) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$

証明 (1) $x>1$ として、$n\leq x<n+1$ となる $n\in\mathbb{N}$ をとる。

$x\to\infty$ のとき $n\to\infty$

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

$$\Longleftrightarrow \underbrace{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1}}_{\to e\ (n\to\infty)}<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{\to e\ (n\to\infty)}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

(2) $x<-1$ とする。$t=-x$ とすると、$x\to-\infty$ のとき、$t\to\infty$

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\left(1-\frac{1}{t}\right)^{-t}=\left(\frac{t}{t-1}\right)^t=\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^t=\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1}\left(1+\frac{1}{t-1}\right)$$

$$\xrightarrow[(1)]{} e\times 1=e\quad (t\to\infty)$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$$

(3) $0<x<1$ とする。$y=\frac{1}{x}$ とすると、$x\to+0$ のとき $y\to\infty$

$$(1+x)^{\frac{1}{x}}=\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\to e\quad (y\to\infty)\quad (\because (1))$$

$\therefore \displaystyle\lim_{x\to+0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

同様に $\displaystyle\lim_{x\to-0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

$\Rightarrow \displaystyle\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

(4) $\dfrac{\log(1+h)}{h}=\log(1+h)^{\frac{1}{h}}\longrightarrow \log e=1\quad (h\to 0)$

↑(3)と $\log x$ の連続性

(5) $t=e^h-1$ とすると、$h=\log(1+t)$

$h\to 0$ のとき $t\to 0$ (4)を使う。

2 1変数関数の微分

2.1 微分係数と導関数

定義 $a \in \mathbb{R}$とし、Iを$a \in I$となる開区間とする. $f: I$上の関数とする。

極限 $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ が存在するとき、 $= f'(a)$

fは点aで微分可能であるといい、この極限値を

fの$x=a$における微分係数といって、$f'(a)$と書く.

定理 2.1 関数$f(x)$が$x=a$で微分可能 $\Rightarrow$ $f(x)$は$x=a$で連続

証明 $\lim_{x \to a} (f(x)-f(a)) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a) = f'(a) \times 0 = 0$

$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ 　　fは$x=a$で連続

定義 $a \in \mathbb{R}$とし、Iを$a \in I$となる区間とする。$f: I$上の関数とする.

右極限 $\lim_{h \to +0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'_+(a)$

が存在するとき fは$x=a$で右微分可能であるという.
このとき上の右極限をfのaでの右微分係数といい $f'_+(a)$と書く.
同様に左微分係数 $f'_-(a) = \lim_{h \to -0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ も定義される.
まとめて片側微分係数という.

注意 ・fがaで微分可能

$\Longleftrightarrow$ ・fがaで右微分可能かつ左微分可能で $f'_+(a) = f'_-(a)$

このとき $f'(a) = f'_+(a) = f'_-(a)$

定義 区間I上の関数fがIの全ての点で微分可能であるとき、fは区間Iで微分可能という.

(Iの端点がIに属するときは、その端点では、片側微分係数をもつだけでよい)

このとき、各$x \in I$に対して微分係数$f'(x)$を対応させる(新しい)関数をfの導関数といい、f'と書く.

$y=f(x)$の関数を $\frac{df}{dx}$, y', $\frac{dy}{dx}$ とも書く。

既知

f, g 微分可能 $\Rightarrow$ $(f+g)' = f'+g'$, $(fg)' = f'g + fg'$ 　$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

・$(x^n)' = nx^{n-1}$ 　$(\sin x)' = \cos x$ 　$(\cos x)' = -\sin x$ 　$(e^x)' = e^x$ 　$(\log x)' = \frac{1}{x}$

$f(x) = |x|$は$x=0$で微分可能でない.

「点aの周りで」や「点aの近くで」とは「$a \in I$となる開区間Iで」を意味する.

定理 2.3 fを点aのまわりで定義された関数とする

(a) fが$x=a$で微分可能

$\Longleftrightarrow$ (b) 点aのまわりで

$f(x) = f(a) + (x-a)A + (x-a)B(x)$ と表される. (＊)

ここで
・Aはある定数
・$B(x)$はaのまわりで定義されたある関数で
$x=a$で連続で $B(a)=0$ であるもの.

これらが成り立つとき. $A = f'(a)$である.

(a), (b)

(a) → (b)

$$B(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}-f'(a) & (x\neq a)\\ 0 & (x=a)\end{cases}$$ とする.

このとき、点 a のまわりで $f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+(x-a)B(x)$ と表される

$f(x)$ が $x=a$ で微分可能なので

$\lim_{x\to a} B(x)=f'(a)-f'(a)=0$
一方 $B(a)=0$

$\therefore \lim_{x\to a} B(x)=0=B(a)$
$B(x)$ は $x=a$ で連続

(b) ⇒ (a) (※) より

$x\neq a$ のとき $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=A+B(x)\to A+\underbrace{B(a)}_{0}=A$ ($B(x)$ は $x=a$ で連続)

∴ f は $x=a$ で微分可能

以上から $A=f'(a)$ が分かる.

定理 2.4 (合成関数の微分法)

f: 区間 I 上微分可能
g は $f(I)$ を含む区間で微分可能
とする.

このとき合成関数 $g\circ f$ は I 上微分可能で

$$(g\circ f)'(x)=g'(f(x))f'(x) \quad (x\in I)$$

証明 $a\in I$ を任意とする。

a のまわりで $f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+(x-a)B(x)$ …①

$b=f(a)$ として、b のまわりで $g(y)=g(b)+(y-b)g'(b)+(y-b)D(y)$ …②

ここで $\begin{cases}B(x) \text{ は } x=a \text{ で連続で } & B(a)=0\\ D(x) \text{ は } y=b \text{ で 〃} & D(b)=0\end{cases}$

$y=f(x)$, $b=f(a)$ を②に代入

$g(f(x))=g(f(a))+(f(x)-f(a))(g'(f(a))+D(f(x)))$

①を代入 $=g(f(a))+(x-a)(f'(a)+B(x))(g'(f(a))+D(f(x)))$

$=g(f(a))+(x-a)g'(f(a))f'(a)+(x-a)E(x)$

ここで $E(x)=B(x)g'(f(a))+(f'(a)+B(x))D(f(x))$

$E(x)$ は $x=a$ で連続で、$E(a)=0$

($\because$ $B(a)=0$ $D(f(a))=D(b)=0$)

定理 2.3 より $g\circ f$ は $x=a$ で微分可能で $(g\circ f)'(a)=g'(f(a))f'(a)$

(コメント)

$$\times\ \frac{g(f(x))-g(f(a))}{x-a}=\frac{g(f(x))-g(f(a))}{f(x)-f(a)}\cdot\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

例 (対数微分法)

(1) $\alpha\in\mathbb{R}$ のとき $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$

(2) $a>0$ のとき $(a^x)'=a^x\log a$

(3) $(x^x)'=x^x(\log x+1)$ $(x>0)$

証明 (1) $y = x^{\alpha}\ (x>0)$ とする。 $\log y = \log x^{\alpha} = \alpha \log x$

両辺を x について微分すると、

$$\frac{y'}{y} = \alpha \cdot \frac{1}{x} \iff y' = y \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$$

(3) $y = x^{x}\ (x>0)$ とする. $\log y = \log x^{x} = x \log x$

両辺 x で微分

$$\frac{y'}{y} = \log x + 1 \iff y' = y(\log x + 1) = x^{x}(\log x + 1)$$

定理2.5 (逆関数の微分法)

$y=f(x)$ が関数I上の狭義単調な微分可能な関数ならば逆関数 $x=f^{-1}(y)$ は、

$\underbrace{f'(x)}_{= f'(f^{-1}(y))} \neq 0$ となる $y \in f(I)$ で微分可能で

$$\frac{d}{dy} f^{-1}(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \qquad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

例 (逆三角関数の導関数)

(1) $(\sin^{-1} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(-1<x<1)$

(2) $(\cos^{-1} x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(-1<x<1)$

(3) $(\tan^{-1} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$ $(x \in \mathbb{R})$

証明 (1) $y = \sin^{-1} x$ $(-1<x<1)$ とする. $x = \sin y$ $\left(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right)$

$\frac{dx}{dy} = \cos y > 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(3) $y = \tan^{-1} x$ とすると $x = \tan y$ $\left(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right)$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos^2 y} = 1 + \tan^2 y = 1 + x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{1+x^2}$$