数学I・A

0 序章

R：実数全体　N：自然数全体　Z：整数全体　Q：有理数全体

区間
$$\left.\begin{array}{l}(a,b)=\{x \mid a<x<b\}\\ (a,\infty)=\{x \mid x>a\}\\ (-\infty,b)=\{x \mid x<b\}\end{array}\right\} \longleftarrow \text{開区間}$$
$$\left.\begin{array}{l}[a,b]=\{x \mid a\leqq x\leqq b\}\\ [a,\infty)=\{x \mid x\geqq a\}\\ (-\infty,b]=\{x \mid x\leqq b\}\end{array}\right\} \longleftarrow \text{閉区間}$$

論理記号

$\forall$ と $\exists$

for any, for all　　There exists

X：集合とする。

「任意の $a\in X$ に対して、命題 $P(a)$ が成り立つ」ということを、

$\forall a\in X$、$\underbrace{P(a)}_{\text{文章}}$

「ある $a\in X$ が存在して、命題 $P(a)$ が成り立つ」ということを、

$\exists a\in X$、$P(a)$　または、　$\exists a\in X$ $\underset{\text{such that}}{\text{s.t.}}$ $P(a)$　と書く。

例えば、$\forall x\in[-1,1]$, $x^2\leqq 1$

$\exists x\in[-1,1]$ s.t. $x^2\leqq \frac{1}{4}$

1 極限と連続性

1.1 実数

$\mathbb{R}$は四則演算と大小関係がある。

三角不等式

$\forall x, y \in \mathbb{R}$に対して、

(1) $|x+y| \leqq |x|+|y|$

(2) $||x|-|y|| \leqq |x-y|$

証明 (1) $-|x| \leqq x \leqq |x|$

$-|y| \leqq y \leqq |y|$

$-|x|-|y| \leqq x+y \leqq |x|+|y|$

$|x+y| \leqq |x|+|y|$

(2) (1)より、

$|x| = |y+(x-y)|$

$\leqq |y|+|x-y|$

$|x|-|y| \leqq |x-y|$

同様に、$|y|-|x| \leqq |y-x| = |x-y|$

$||x|-|y|| \leqq |x-y|$

定義 (有界性、上界、下界)　$E \in \mathbb{R}$とする。

(1) ・「ある$k\in\mathbb{R}$が存在して、全ての$x\in E$に対して、$x \leqq k$」が成り立つとき、

($\exists k\in\mathbb{R}$ s.t. $\forall x\in E$、$x\leqq k$)

Eは上に有界であるという。

・$k\in\mathbb{R}$が「全ての$x\in E$に対して $x\leqq k$」をみたすとき、

kはEの上界であるという。

(2) 「$\exists k\in\mathbb{R}$ s.t. $\forall x\in E$に対して $x\geqq k$」が成り立つとき、

Eは下に有界であるという。

$k\in\mathbb{R}$が「$\forall x\in E$、$x\geqq k$」をみたすとき、kはEの下界であるという。

(3) Eが上にも下にも有界のとき、Eは有界であるという。 注 上界や下界が存在したら、それらは無数になる。

例 ・$E=(-\infty,0]$とするとEは、上に有界だが、下に有界ではない。

$E=(-\infty,0]$

・$E=[0,\infty)$とすると、Eは下に有界だが、上に有界ではない。

$E=[0,\infty)$

・$E=[0,1]$は有界

定義 (最大値、最小値) $E\in\mathbb{R}$とする.

・Eの元で最大のものが存在するとき、その数をEの最大値という。
・〃 最小 〃 〃 〃 最小値という。

注 $E\in\mathbb{R}$の最大値や最小値は存在するとは限らない.
↑たとえ有界であっても

例えば
$E=(0,1)$

定義 (上限、下限) $E\in\mathbb{R}$とする.

(1) 以下をみたす$\alpha\in\mathbb{R}$が存在するとき, αはEの上限であるといい, $\sup E$と書く。

(i) $\forall x\in E$、$x\leq\alpha$
(ii) $\forall\varepsilon>0$, $\exists x_0\in E$ s.t. $\alpha-\varepsilon<x_0$

注 αがEの上限 $\Longleftrightarrow$ αはEの最小の上界

∵ (i)はαはEの上界
(ii)はαより小さい数はEの上界にはなり得ない. ことを意味している。

(2) 以下をみたす$\beta\in\mathbb{R}$が存在するとき、βはEの下限であるといい, $\inf E$と表す。

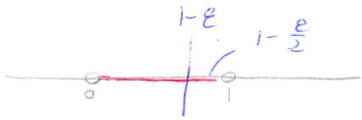
(i) $\forall x\in E$、$x\geq\beta$
(ii) $\forall\varepsilon>0$, $\exists x_0\in E$ s.t. $x_0<\beta+\varepsilon$.

注 βがEの下限 $\Longleftrightarrow$ βがEの最大の下界

例 $E=(0,1)$のとき, $\sup E=1$ $\inf E=0$

∵ (i) $\forall x\in E$に対して, $x\leq 1$は自明
(ii) $0<\varepsilon<1$を任意とする。

$$1-\varepsilon<\underbrace{1-\frac{\varepsilon}{2}}_{x_0}\in(0,1)$$



公理 (実数の連続性公理) ←認めるもの.

$E\in\mathbb{R}$が上に有界で, $E\neq\phi$ならばEの上限が($\mathbb{R}$の中に)存在する.

注意 $E\in\mathbb{R}$が下に有界で $E\neq\phi$ $\Rightarrow$ Eの下限が($\mathbb{R}$の中に)存在する。

∵ Eが下に有界なら, $E'=\{-x\mid x\in E\}$は上に有界になり,

$$\inf E=\underline{-\sup E'}$$
↖存在.

なので, 公理から, $\inf E$が存在。

・Eが上に有界でないときは, $\sup E=\infty$と書く。
・Eが下に有界でないときは, $\inf E=-\infty$と書く。

注 ・$\max E$が存在 $\Rightarrow$ $\max E=\sup E\in\mathbb{R}$
・$\min E$が存在 $\Rightarrow$ $\min E=\inf E\in\mathbb{R}$

定理 1.1 （アルキメデスの原理）

$\mathbb{N}$は上に有界ではない。
自然数全体

定理1.1（アルキメデスの原理）
$\mathbb{N}$は上に有界でない
このことは
$\forall a \in \mathbb{R}$、$\exists n \in \mathbb{N}$ s.t. $n > a$
を意味する。

集合の「元」とは「要素」のこと。

証明（背理法）

$\mathbb{N}$が上に有界であると仮定する

$\alpha = \sup \mathbb{N} \in \mathbb{R}$が存在する。

上限の定義（ii）で$\varepsilon = 1$として、

$\exists m \in \mathbb{N}$ s.t. $\alpha - 1 < m \iff \alpha < m + 1$

$m+1 \in \mathbb{N}$より、これはαが$\mathbb{N}$の上界であることに反する。

$\mathbb{N}$は上に有界ではない。

定理 1.2 （有理数の稠密性）

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$；$\alpha < \beta$をみたす任意の$\alpha, \beta$に対して、

$\alpha < q < \beta$となる有理数qが存在する。

証明

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$　$\alpha < \beta$とする。

アルキメデスの原理により、

$$\exists n \in \mathbb{N} \text{ s.t. } n > \frac{1}{\beta - \alpha} \iff \beta > \alpha + \frac{1}{n} \cdots (※)$$

アルキメデス

$\exists m \in \mathbb{N}$ s.t. $m > n\alpha$ かつ $m < -n\alpha$　　$-m < n\alpha < m$

$-m, -m+1, \cdots, m-1, m$のうち、$n\alpha$をはじめて超えるものを$k \in \mathbb{Z}$とすると、

$$k - 1 \leqq n\alpha < k \Rightarrow \alpha < \frac{k}{n} \leqq \alpha + \frac{1}{n} < \beta$$

q　有理数　(※)

1.2 数列の極限

定義 数列$\{a_n\}$がαに収束するとは以下が成り立つこと。

どんなに小さい$\varepsilon > 0$に対しても

任意の$\varepsilon > 0$に対してある$N \in \mathbb{N}$が存在して
$n \geqq N$となる任意の$n \in \mathbb{N}$に対して
$$|a_n - \alpha| < \varepsilon$$
が成り立つ。

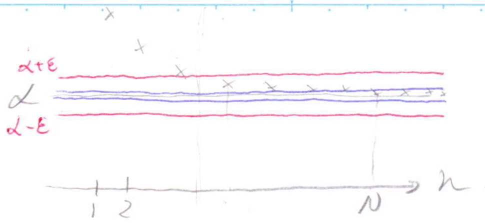
論理記号で書くと、
$\forall \varepsilon > 0$、$\exists N \in \mathbb{N}$ s.t. $\forall n \geqq N$、$|a_n - \alpha| < \varepsilon$

αを$\{a_n\}$の極限値といい

$\lim_{n \to \infty} a_n = \alpha$　　$a_n \to \alpha \ (n \to \infty)$

などと書く。

$\boxed{\varepsilon - N \text{論法}}$



例 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

証明 $\varepsilon > 0$ を任意にとる。

$N > \frac{1}{\varepsilon}$ となる $N \in \mathbb{N}$ をとる。

$\varepsilon > 0$ に対してこの不等式が成り立つ N をみつける。

$\forall n \geq N$ に対して、

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$$

定理1.3 $\{a_n\}$ が収束するとき極限は唯一つに定まる。

証明 α と β がともに $\{a_n\}$ の極限値であるとする。

($\alpha = \beta$ を示せばよい)

(背理法) $\alpha \neq \beta$ とする。

$|\alpha - \beta| > 0$ なので　($\varepsilon = \frac{|\alpha-\beta|}{2} > 0$ とおいて)

$\exists N_1 \in \mathbb{N}$ s.t. $\forall n \geq N_1$, $|a_n - \alpha| < \frac{|\alpha - \beta|}{2}$

$\exists N_2 \in \mathbb{N}$ s.t. $\forall n \geq N_2$ $|a_n - \beta| < \frac{|\alpha-\beta|}{2}$

$N = \max\{N_1, N_2\}$ とすると、

$|\alpha - \beta| = |(\alpha - a_n) + (a_n - \beta)| \leq |\alpha - a_n| + |a_n - \beta| < \frac{|\alpha-\beta|}{2} + \frac{|\alpha-\beta|}{2} = |\alpha - \beta|$

$|\alpha-\beta| < |\alpha-\beta|$ となり不合理

定義 (発散) 数列 $\{a_n\}$ が収束しないとき発散するという。

特に (1) 数列 $\{a_n\}$ が ∞ に発散するとは以下が成り立つこと

「$\forall k \in \mathbb{R}$, $\exists N \in \mathbb{N}$ s.t. $\forall n \geq N$ $a_n > k$」

このとき、$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ 又は、$a_n \to \infty$ $(n \to \infty)$ と書く。

(2) $\lim_{n\to\infty}(-a_n) = \infty$ であるとき、$\{a_n\}$ は $-\infty$ に発散するといい

$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ 又は、$a_n \to -\infty$ $(n \to \infty)$ と書く。

命題 $a_n > 0$ のとき、

$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty \iff \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$ ←(確かめよ)

定義 ・数列 $\{a_n\}$ が上に有界であるということは、集合 $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ が上に有界であること

〃　下に有界　〃　〃　下に有界　〃

〃　有界　〃　〃　有界　〃

つまり、数列 $\{a_n\}$ が有界 $\iff$ $\exists M > 0$ s.t. $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq M$

記号 $\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$　$\inf_{n\in\mathbb{N}} a_n = \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ と書く