高階導関数

f:区間Iで微分可能とする.

・更にf'がIで微分可能であるとき、fはIで2回微分可能であるといいf'の導関数をfの2階導関数といい、f''と書く.

以下同様にして、$y=f(x)$のn階導関数が定義され、$f^{(n)}$, $\frac{d^n f}{dx^n}$, $y^{(n)}$, $\frac{d^n y}{dx^n}$などと書く.
($f^{(0)}=f$と約束する)

$f^{(n)}$が存在するとき、fはn回微分可能であるという。

・fが区間Iでn回微分可能で、$f^{(n)}$がIで連続であるとき、fはIでC^n級又はn回連続微分可能であるという.

fがIで何回でも微分可能であるとき、fはIでC^∞級であるという.

定理 2.6 (ライプニッツの公式)

f, g:区間Iでn回微分可能とすると、

$$\frac{d^n}{dx^n}(f(x)g(x)) = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) \quad (x \in I)$$

ここで ${}_nC_k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ $0! = 1$

注 $n=1$のとき、積の微分の公式 $(fg)' = f'g + fg'$

証明はnに関する帰納法(積の微分の公式を使う)

例 $f(x) = x^2 e^x$に対して$f^{(n)}(x)$を求める. $(n \geq 2)$

解答 $(x^2)' = 2x$ $(x^2)'' = 2$ $\frac{d^k}{dx^k}(x^2) = 0$ $(k \geq 3)$

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k (x^2)^{(k)} (e^x)^{(n-k)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k (x^2)^{(k)} \cdot e^x \\ &= {}_nC_0 x^2 e^x + {}_nC_1 (2x) e^x + {}_nC_2 \cdot 2 \cdot e^x \\ &= (x^2 + 2nx + n(n-1)) e^x \end{aligned}$$

2.2 平均値の定理、テイラーの定理、ロピタルの定理

定理 2.7 (ロルの定理)

関数fが閉区間$[a, b]$で連続、開区間(a, b)で微分可能で、$f(a)=f(b)$とする.
このとき、

$$a < c < b \quad かつ \quad f'(c) = 0$$

となる数cが存在する.

証明

fが定数関数の場合は自明 (∵ $f'(x)=0$, $\forall x \in (a, b)$ だから)

以下、fは定数関数でないとする.

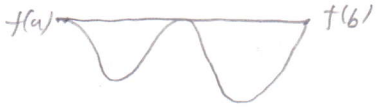
(i) $\exists x \in (a, b)$ s.t. $f(x) > f(a) = f(b)$ …(＊)
のときを考える.

fは閉区間$[a,b]$上連続なので、ある$c\in[a,b]$で最大値をとる。
(*)より $a<c<b$ である。
$f'(c)=0$ を示す。
$f(c)$は最大値なので

$x>c$ ならば $\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}\leqq 0$, $x\to c+0$ として $f'(c)\leqq 0$

$x<c$ ならば $\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}\geqq 0$, $x\to c-0$ として $f'(c)\geqq 0$

以上より $f'(c)=0$



(ii) (*)が成立しないときは
$\exists x\ (a,b)$ s.t. $f(x)<f(a)=f(b)$
fが$[a,b]$において最小値をとるc $[a,b]$について、同様の方法で$f'(c)=0$が示される。

<u>定理(2.8)</u>(平均値の定理)
関数fが閉区間$[a,b]$で連続、開区間(a,b)で微分可能とする。
このとき、 $a<c<b$ かつ $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$

をみたす数cが存在する。

<u>証明</u> $F(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x$ $(x\in[a,b])$ とする。

$F(x)$は$[a,b]$上連続、(a,b)上微分可能で $F(a)=F(b)$
ロルの定理より、$\exists c\in(a,b)$ s.t. $\underbrace{F'(c)}_{=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}=0$

<u>定理2.9</u>
fは$[a,b]$で連続、(a,b)で微分可能とする。
(1) $\forall x\in(a,b)$, $f'(x)=0 \Rightarrow f(x)$は$[a,b]$上の定数関数
(2) $\forall x\in(a,b)$, $f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$は$[a,b]$上狭義単調増加
(3) $\forall x\in(a,b)$, $f'(x)<0 \Rightarrow$ 〃 〃 狭義単調減少

<u>証明</u>
$a\leqq x_1<x_2\leqq b$ となる x_1, x_2 を任意にとる。
平均値の定理より、
$x_1<c<x_2$ かつ $f(x_2)-f(x_1)=\underbrace{f'(c)}_{\text{符号}}\underbrace{(x_2-x_1)}_{>0}$
となるcが存在する。
これより(1)〜(3)が従う。

定理 2.10 (テイラーの定理)　$a \neq b$ とする。

$a<b$ のとき f は閉区間 $[a,b]$ 上 C^{n-1} 級で開区間 (a,b) で n 回微分可能とする。

$a>b$ 〃 〃 $[b,a]$ 〃 〃 (b,a) 〃 〃

このとき、

$$f(b)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n$$

$$=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(b-a)+\frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n$$

をみたす「a と b の間の数 c $(c \neq a,b)$」が存在する。

$$R_n=\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(b-a)^n$$

と書き(ラグランジュの)剰余項という。

注 a と b の間の数 c $(c \neq a,b)$ は

$$c=a+\theta(b-a) \quad (0<\theta<1)$$

と表される。

剰余項は

$$R_n=\frac{f(a+\theta(b-a))}{n!}(b-a)^n \quad (0<\theta<1)$$ とも表される。

注 $n=1$ のときテイラーの定理は平均値の定理

証明

$a<b$ のときに示す。定数 A を以下で定める。

$$f(b)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k+\frac{A}{n!}(b-a)^n \cdots ①$$

$\exists c \in (a,b)$ s.t. $A=f^{(n)}(c)$ を示す。

$$F(x)=f(b)-\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k+\frac{A}{n!}(b-x)^n\right\} \quad x\in[a,b] \text{ とする}$$

$F(x)$ は $[a,b]$ で連続、(a,b) で微分可能で、$F(a)=F(b)$ (∵①より)

ロルの定理より、$\exists c \in (a,b)$ s.t. $F'(c)=0$

$$F'(x)=-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k+\underbrace{\sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!}(b-x)^{k-1}}_{+\sum_{k=0}^{n-2}\frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k}+\frac{A}{(n-1)!}(b-x)^{n-1}$$

$$=-\frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1}+\frac{A}{(n-1)!}(b-x)^{n-1}$$

$$F'(c)=0 \iff -\frac{f^{(n)}(c)}{(n-1)!}(b-c)^{n-1}+\frac{A}{(n-1)!}(b-c)^{n-1}=0 \iff A=f^{n}(c)$$

系 $a \in \mathbb{R}$ Iを $a \in I$ となる区間とする。
fが区間Iでn回微分可能であるとする。
$\forall x \in I$ に対して $0 < \theta < 1$ かつ

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n)}(a+\theta(b-a))}{n!}(x-a)^n$$

をみたすθが存在する。(これはテイラーの定理とよばれる)
(∵ 定理 2.10 を $[a, x]$ 又は $[x, a]$ で適用すればよい。)
特に $a=0$ のとき 上は

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!} x^n$$

となる。これを(特別に)マクローリンの定理ということがある。
注意 θはnとxに依存して決まる数である。
fがIでC^∞級のとき、

$$\frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n \to 0 \quad (n \to \infty)$$

となる $x \in I$ に対して、

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

と表される。
これをfのaにおけるテイラー展開という。
特に $a=0$ のとき、マクローリン展開という。 ← $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$
例(テイラーの定理の適用例) $n \in \mathbb{N}$ とする $a=0$ のときを考える(マクローリンの定理)

(1) $\forall x \in \mathbb{R}$ $\exists \theta \in (0,1)$ s.t. $e^x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^{\theta x}}{n!} x^n$

(2) $\forall x \in \mathbb{R}$ $\exists \theta \in (0,1)$ s.t. $\sin x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + \frac{(-1)^n \cos \theta x}{(2n+1)!} x^{2n+1}$

(3) $\forall x \in \mathbb{R}$ $\exists \theta \in (0,1)$ s.t. $\cos x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + \frac{(-1)^n \cos \theta x}{(2n)!} x^{2n}$

(4) $\forall x > -1$ $\exists \theta \in (0,1)$ s.t. $\log(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + \frac{(-1)^{n-1}}{n(1+\theta x)^n} x^n$

(5) $\alpha \in \mathbb{R}$とする $\forall x > -1$ $\exists \theta \in (0,1)$ s.t.

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + \binom{\alpha}{n}(1+\theta x)^{\alpha-n} x^n \quad \text{ここで} \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$$

確認1 (1) $f(x)=e^x$ $(x\in\mathbb{R})$ とする。f は $\mathbb{R}$ 上 C^∞ 級で $\forall k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ に対して

$f^{(k)}(x)=e^x$ $f^{(k)}(0)=1$

$\exists\theta\in(0,1)$ s.t. $f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}+\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^k}{k!}+\frac{e^{\theta x}}{n!}x^n$

補足 $\forall x\in\mathbb{R}$ $\frac{e^{\theta x}}{n!}x^n\longrightarrow 0$ $(n\to\infty)$

$\left(\because \left|\frac{e^{\theta x}}{n!}x^n\right|\leq\frac{|x|^n}{n!}e^{|\theta x|}\underset{(\because 0<\theta<1)}{\leq}\frac{|x|^n}{n!}e^{|x|}\longrightarrow 0\ (n\to\infty)\right.$ $\left.(\forall a>0,\ \frac{a^n}{n!}\to 0\ (n\to\infty))\right)$

$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ $(\forall x\in\mathbb{R})$ が成立。

定理2.11 (コーシーの平均値の定理)

f,g：閉区間 $[a,b]$ で連続、開区間 (a,b) で微分可能とする。

$g'(x)\neq 0$ $[\forall x\in(a,b)]$ とする。

このとき $g(a)\neq g(b)$ で

$a<c<b$ かつ $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$ … $(*)$

をみたす c が存在する。

証明 $F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\{g(x)-g(a)\}$ とする。

$F(x)$ はロルの定理の仮定をみたすことがすぐにわかり、

$\exists c\in(a,b)$ s.t. $F'(c)=0$ $\Leftrightarrow$ $(*)$

$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(x)$

不定形の極限

定理2.12 (ロピタルの定理)

$f(x)$ と $g(x)$ は $x=a$ 以外の a の近くの全ての点で定義されていて ($x=a$ を除いて) 微分可能であるとする。

$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=0$ … ①

又は

$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=\infty$ … ②

であるとし、極限 $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在するとする。

このとき、極限 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ が存在し、$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

注 片側極限 $x\to\pm\infty$ のときも同様のことが成立。

注 ロピタルの定理は不定形のとき以外は適用できない。