ロピタルの定理の証明

$$\begin{cases} \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0 \cdots ① \\ \alpha = \lim_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} \text{ が存在する。} \end{cases}$$

$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty \cdots ②$

のときは略

(例えば、難波 定理 2.19)

$\Rightarrow \lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \alpha$ を示す。

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & (x \neq a) \\ 0 & (x = a) \end{cases} \qquad G(x) = \begin{cases} g(x) & (x \neq a) \\ 0 & (x = a) \end{cases}$$

とすると ①より $F(x)$, $G(x)$ は a のまわりで連続、a 以外で微分可能

$x \neq a$ のとき、コーシーの平均値の定理より、x と a の間の数 c ($c \neq a, x$) が存在して、

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F(x)-F(a)}{G(x)-G(a)} = \frac{F'(c)}{G'(c)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \cdots ③$$

$x \to a$ のとき、$c \to a$ なので、③で $x \to a$ として

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha$$

例 (1) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^k}{e^x} = 0$ $(k \in \mathbb{N})$ (2) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\log x}{x^\alpha} = 0$ $(\alpha > 0)$

(3) $\lim_{x\to +0} x^\alpha \log x = 0$ $(\alpha > 0)$

2.3 微分の応用(1変数)

極値

定義 $f(x)$ を区間上の関数とする。$c \in I$ で c は I の端点ではないとする。

$f(x)$ が点 c で極大(極小)であるとは、

ある $\delta > 0$ が存在して、$0 < |x - c| < \delta$ となる全ての x に対して

$$f(x) < f(c) \quad (f(x) > f(c))$$

をみたすこと

$f(c)$ を極大値(極小値)という。極大値と極小値をあわせて極値という。

定理 2.13

c のまわりで定義された関数 $f(x)$ が点 c で極値をとり、c で微分可能

$\Rightarrow f'(c) = 0$

(逆は成立しない)

証明 $f(x)$ が $x = c$ で極値をとるとき、

ある $h > 0$ に対して $f(x)$ は $[c-h, c+h]$ において $x = c$ で最大値又は最小値をとる。

ロルの定理の証明と同様に $f'(c) = 0$

定理2.14
fを区間I上の関数とし$c \in I$とする. ある$h>0$が存在してfが$(c+h, c-h)$が連続で, $(c-h, c)$と$(c, c+h)$で微分可能とする。
$\forall x \in (c-h, c)$に対して $f'(x)>0$ $[f'(x)<0]$
$\forall x \in (c, c+h)$に対して $f'(x)<0$ $[f'(x)>0]$
であるとする。
このときfは点cで極大[極小]である.

証明 — の場合に示す。
・$x \in (c-h, c)$とする.
$[x, c]$で平均値の定理を用いると $\exists \xi \in (x, c)$ s.t.

$$f(c)-f(x) = \underbrace{f'(\xi)}_{>0}(c-x) > 0 \qquad \therefore f(x) < f(c)$$

・同様に $x \in (c, c+h)$のとき、$f(x) < f(c)$
fは$x=c$で極大

定理2.15 $n \in \mathbb{N}$, $n \geqq 2$とする。
関数fは$x=c$の周りでC^n級で
$f^{(k)}(c)=0$, $(1 \leqq k \leqq n-1)$, $f^{(n)}(c) \neq 0$ とする。
(1) nが偶数のとき、
・$f^{(n)}(c)>0 \Rightarrow f$は$c$で極小
・$f^{(n)}(c)<0 \Rightarrow f$は$c$で極大
(2) nが奇数のとき、fはcで極値をとらない。

証明 (I) $f^{(n)}(c)>0$のとき
$f^{(n)}$の連続性より、cの十分近くでは $f^{(n)}(x)>0$ 問題1.9
$x \neq c$でxがcに十分近いとき、テイラーの定理より、
cとxの間の数ξ ($\xi \neq c, x$)が存在して、

$$f(x)-f(c) = \underbrace{\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}}_{>0}\underbrace{(x-c)^n}_{符号} \qquad (① \ f'(c) = \cdots = f^{(n-1)}(c) = 0)$$

(1) nが偶数のとき、
$x \neq c$でxがcに十分近いとき、
$(x-c)^n>0$なので、①より $f(x)-f(c)>0$ $\therefore f$はcで極小
(2) nが奇数のとき、
・$x<c$のとき、$(x-c)^n<0$なので、①より、$f(x)-f(c)<0$
・$x>c$のとき、$(x-c)^n>0$なので、①より $f(x)-f(c)>0$
} fはcで極値をとらない。
(II) $f^{(n)}(c)<0$のときも同様.

凹凸

定義 関数 f が区間 I で凸又は下に凸であるとは以下が成り立つこと。

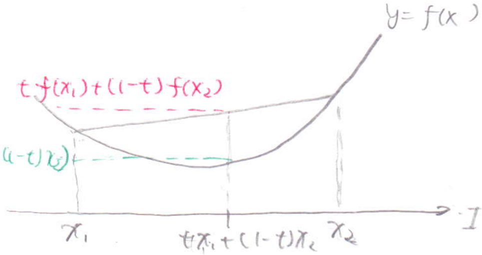
$\forall x_1, x_2 \in I$ $\forall t(0,1)$ に対して

$$f(tx_1+(1-t)x_2) \leqq tf(x_1)+(1-t)f(x_2)$$

「$\leqq$」のかわりに「$<$」が成り立つとき、f は I で狭義に凸であるという。

・f が I で凹又は上に凸であるとは

$-f(x)$ が I で凸であること。



注 f が区間 I で凸ということは

$\forall x_1, x_2 \in I$ $x_1<x_2$ のとき、区間 $[x_1, x_2]$ で

$y=f(x)$ のグラフは

点 $(x_1, f(x_1))$ と点 $(x_2, f(x_2))$ を結ぶ線分より

下にあることを意味する。

定理2.16 f が I で2回微分可能とする。

(a) f が I で凸 $\Longleftrightarrow$ (b) $\forall x \in I$ に対して $f''(x) \geqq 0$

証明 (a) $\Rightarrow$ (b) を示す。

$x_1<x_2$ となる $x_1, x_2 \in I$ を任意にとる。$f'(x_1) \leqq f'(x_2)$ を示す。

$x \in (x_1, x_2)$ を任意にとり、

$x = tx_1+(1-t)x_2$ $0<t<1$ となる t をとる。

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} = \frac{f(tx_1+(1-t)x_2)-f(x_1)}{tx_1+(1-t)x_2-x_1} \underset{\substack{\uparrow \\ f\text{が凸}}}{\leqq} \frac{tf(x_1)+(1-t)f(x_2)-f(x_1)}{(1-t)(x_2-x_1)}$$

$$= \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

$x \to x_1+0$ とすると、

$$f'(x_1) \leqq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \cdots ①$$

同様に $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqq \dfrac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$ が示されるので、

$x \to x_2-0$ として $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leqq f'(x_2) \cdots ②$

①, ② より $f'(x_1) \leqq f'(x_2)$ $\therefore f'$ は I で単調増加

$f''(x) \geqq 0$ $(\forall x \in I)$

(b) $\Rightarrow$ (a) を示す。

$f''(x) \geqq 0$ $(\forall x \in I)$ なので、f' は I で単調増加

$x_1<x_2$ となる $x_1, x_2 \in I$ を任意にとり、$t \in (0,1)$ を任意とする。

$tf(x_1)+(1-t)f(x_2)-f(tx_1+(1-t)x_2)$

$=t\{f(x_1)-f(tx_1+(1-t)x_2)\}+(1-t)\{f(x_2)-f(tx_1+(1-t)x_2)\}$

平均値の定理より $x_1<{}^\exists\xi_1<tx_1+(1-t)x_2<{}^\exists\xi_2<x_2$ s.t.

$=tf'(\xi_1)\{x_1-(tx_1+(1-t)x_2)\}+(1-t)f'(\xi_2)\{x_2-(tx_1+(1-t)x_2)\}$

$=t(1-t)\{f'(\xi_2)-f'(\xi_1)\}(x_2-x_1)>0$ (f'が増加)

fはIで凸

定義

$f(x)$は$x=a$のまわりで定義されているとする。ある$h>0$に対して

・fが$(a-h,a)$で凸、$(a,a+h)$で凹
　又は
・fが 〃 で凹、 〃 で凸

であるとき、

点$(a,f(a))$はfの**変曲点**であるという。

定理2.17 fがaのまわりでC^2級とする.

点$(a,f(a))$がfの変曲点 $\Rightarrow f''(a)=0$

(証明には定理2.16を使う) f''の連続性

定理2.18 fはaのまわりでC^2級とする

ある$h>0$に対して

・$a-h<x<a$のとき $f''(x)>0$、$a<x<a+h$のとき $f''(x)<0$
　又は
・ 〃 $f''(x)<0$、 〃 $f''(x)>0$ とする。

このとき点$(a,f(a))$はfの変曲点である。