

科目名	位相1(演習)	対象	2S-B	学部 研究科	理学部第一部	学科 専攻科	数学科	学籍 番号		評点
平成21年7月15日(水)~回目 (1時限目)		担当	大井 武男	学年		氏名				
試験 時間	60分	注意 事項	①. 筆記用具以外持込不可 ②. 下記のみ参照・持込可							

1 S を集合, $2 \leq |S|$ とする.

(1) $(S, \mathcal{O})$ を位相空間とする.

位相でない
 $X = \bigcup \mathcal{V} \quad \mathcal{V} \neq \emptyset$
 $\emptyset = \bigcap \mathcal{V} \quad \mathcal{V} \neq \emptyset$

(イ) この $\mathcal{O}$ について簡潔に説明せよ.

- (i) $\emptyset, S \in \mathcal{O}$ (ii) $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \in \mathcal{O} \Rightarrow \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 \in \mathcal{O}$
 (iii) (任意の族の) 和について閉じている

(ロ) $M \subset S$ とする. $M^\circ, \overline{M}$ の定義を言葉のみで書け. (説明, 証明はイラン)

$M^\circ = M$ に含まれる最大開集合
 $\overline{M} = M$ を含む最小閉集合

(2) S の最弱位相, 最強位相とは何か (それぞれどんな $\mathcal{O}$ のときか)

最弱位相 $\mathcal{O}_* = \{\emptyset, S\}$

最強位相 $\mathcal{O}^* = \mathcal{P}(S)$

2 $(S, \mathcal{O}_S), (T, \mathcal{O}_T)$ を位相空間とする.

(1) 直積位相空間 $S \times T$ の開集合の基を書け. (もっとも標準的なもの!)

$\mathcal{B} = \mathcal{V} \times \mathcal{W} \quad (\mathcal{V} \in \mathcal{O}_S, \mathcal{W} \in \mathcal{O}_T)$ の全体 $\subset \mathcal{P}(S \times T)$

$\emptyset, S \times T \in \mathcal{B}$
 $\mathcal{O}_S \cup \mathcal{O}_T \in \mathcal{B}$

(2) $f: S \rightarrow T$ を連続かつ全射とする. S が連結 $\Rightarrow T$ も連結 を証明せよ.

(ヒント: 対偶の方を示せ. 全射であることをフルに使い.)

③ $\mathcal{O}$ のどんなオープンバザン $\{\mathcal{V}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ に対しても、適当な有限個の $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in A$ をえらぶと $\bigcap_{i=1}^k \mathcal{V}_{\alpha_i} \in \mathcal{O}$ 成立するようにできる

3 $(S, \mathcal{O})$ を位相空間とする. 次の (1), (2), (3) の定義を書け.

(1) S はハウスドルフ

(2) S はコンパクト

(3) S は第2可算公理を満たす

$\mathcal{O}$ の基底として可算なものを $\mathcal{B}$ とおくと
 $(S, \mathcal{O})$ は第2可算公理を満たす

4 (S, d) を距離空間とする. この d から定まる S の位相 $\mathcal{O}$ について述べよ.

$\mathcal{O}_d = \{ \emptyset \in \mathcal{P}(S) \mid \forall x \in \emptyset \exists \varepsilon > 0 [B(x, \varepsilon) \subset \emptyset] \}$

位相空間 $(S, \mathcal{O})$ がハウスドルフ空間であるとき
 ハウスドルフ空間という

$\forall a, b \in S (a \neq b) \exists \mathcal{V}_a \in \mathcal{O} \exists \mathcal{V}_b \in \mathcal{O} [\mathcal{V}_a \cap \mathcal{V}_b = \emptyset]$