1

(1)

(イ) $\mathcal{O}$は次の2つをみたす.

・$\forall \mathcal{U} \subset \mathcal{O}\ [\bigcup \mathcal{U} \in \mathcal{O}]$

・$\forall \mathcal{U} \subset \mathcal{O}\ [\#\mathcal{U} < \infty \Rightarrow \bigcap \mathcal{U} \in \mathcal{O}]$

$\left(\bigcap \mathcal{U} := \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U,\ \bigcup \mathcal{U} := \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U\right)$

(ロ)

M°: Mに含まれる最大の開集合.

$\overline{M}$: Mを含む閉集合で最小の集合.

(2). 最弱位相: $\mathcal{O} = \{\phi, S\}$のとき.

最強位相: $\mathcal{O} = \mathcal{P}(S)$のとき.

2

(1) $\{U \times V \mid U \in \mathcal{O}_S, V \in \mathcal{O}_T\}$

(2) $g: T \to 2$ を連続写像とする.

Sが連結のとき,合成写像$g \circ f$は定数関数であるから,gも定数関数となる. よって T も連結である.

(1) Sが次の条件をみたすとき,

Sはハウスドルフであるという.

・任意の$x, y \in S$に対し,$x \neq y$ならばx, yのある開近傍U, Vで$U \cap V = \phi$をみたすものが存在する.

(2) Sの開集合の任意の族$(U_i)_{i \in I}$について,次が成り立つとき,Sはコンパクトであるという.

・$A \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ならば$I$の有限部分集合$\{i_1, \cdots, i_n\}$で,

$A \subset U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n}$

をみたすものがある.

(3)

Sの開集合系の基底で可算集合であるものが存在するとき,Sは第2可算公理をみたすという.

4

$$\mathcal{O}_d = \{U \in \mathcal{P}(S) \mid \forall x \in U\ \exists \varepsilon > 0\ [B(x, \varepsilon) \subset U]\}$$

$$(B(x, \varepsilon) := \{y \in S \mid d(x, y) < \varepsilon\})$$