物理学基礎論 A 平成 23 年度前期試験問題

担当者名：田中泰明　実施日時：平成 23 年 7 月 27 日（水） 13:00〜14:20

〜解答にあたっての注意〜

- ノート，参考書およびそれらのコピーの持ち込みは禁止する．
- 問題用紙は 2 枚綴となっている．解答用紙は 3 枚綴となっているので，以下の [1]〜[3] を解答用紙各 1 枚ずつに解答せよ．表に書ききれない場合は裏を使用してもよいが，その場合には裏に解答が続く旨を表に明記しておくこと．一つの問題の解答が複数の解答用紙にまたがることはできるだけ避けること (やむを得ない場合はその旨明記すること)．これらが守られていない解答は採点の対象から外すことがあるので注意すること．
- 各自の得意分野・不得意分野があることを考慮して 設問 (小問の設定を含めて) は多めに設定してある．したがって，できる問題から解答していくようにすること．
- 問題文中の ˙ は時間 t による微分を表す．

[1] 水平方向に x 軸，鉛直上方に y 軸を取り，この xy 平面内での質量 m の質点の投射運動を考える．ただし，質点には重力の他に速度に比例した抵抗力（比例係数 mk）が働くものとする．時刻 t での質点の x 座標，y 座標をそれぞれ $x(t)$，$y(t)$ とし，重力加速度を g として，以下の問に答えよ．ただし，時刻 $t=0$ で，x 軸方向に初速 $u_0(>0)$ を，y 軸方向に初速 $w_0(>0)$ を与えて，原点 $(x,y)=(0,0)$ から質点を投射したとせよ．

問 1. 質点の運動方程式を書け．

問 2. 問 1 で書き下した運動方程式を解くことにより，x 軸方向の速度 $v_x(t)\,(=\dot{x}(t))$，y 軸方向の速度 $v_y(t)\,(=\dot{y}(t))$ を時間 t の関数として表せ．

問 3. 質点の座標 $x(t)$ を時間 t の関数として表せ．

問 4. 最高点に達するまでに要する時間 T を求めよ．

問 5. T を問 4 で求めた時刻とするとき，$\displaystyle\lim_{w_0\to\infty} x(T)$ を求めよ．

[2] 図 1 に示すように，台車の上に垂直に立てられた棒の一端 O に，長さ ℓ の糸がつけられ，糸のもう一端には質量 m の質点が取りつけられ，振り子を形成している．この台車が水平左方向に加速度 α(正定数) で加速度運動をする場合の質点の運動について，重力加速度を g として以下の問に答えよ．ただし，O を原点として図 1 に示すように水平右方向に x 軸を，鉛直上方に y 軸を取り，これらは台車に固定された座標系であるとせよ．

問 1. 図 1 に示すように，台車上で測った最下点からの振れ角を θ，糸からの張力を T として，糸がたるんでいないという条件下で，質点の x 座標，y 座標に対する運動方程式を書け．

問 2. 問 1 で得られた運動方程式から，振れ角 θ の満たす微分方程式を導け．

問 3. 問 2 で導出した振れ角 θ の満たす微分方程式から，エネルギー積分を利用して，$\dot{\theta}^2$（質点の角速度の 2 乗）を θ の関数として表せ．ただし，$\theta(0)=0$，$\dot{\theta}(0)=0$ とせよ．

問 4. 問 3 の結果を利用して，糸の張力 T を θ の関数として表せ．初期条件は問 3 と同じとせよ．

問 5. 台車の加速度 α が $\sqrt{3}g$ に等しい場合について以下の問に答えよ．

- 問 5(a) 初期条件として，$\theta(0)=0$，$\dot{\theta}(0)=\omega$ を与えたとき，問 3 と同様にして，$\dot{\theta}^2$ を θ の関数として表せ．
- 問 5(b) 問 5(a) と同じ初期条件を与えたとき，常に糸が張られた状態で質点が点 O のまわりを回転し続けるために，ω が満たさなければならない条件を求めよ．

[3] 以下の問（すべて）に答えよ．

問 1. 2 次元平面において，直交座標系 $\mathrm{O}-xy$ が設定されており，この平面上を運動する質点の位置ベクトルを $\boldsymbol{r}=(x,y)$ とする．極座標 (r,θ) を，$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ で定義し，2 つの単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_r=(\cos\theta,\sin\theta)$，$\boldsymbol{e}_\theta=(-\sin\theta,\cos\theta)$ とするとき，質点の加速度ベクトル $\ddot{\boldsymbol{r}}=\dfrac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}$ を，極座標を用いて，$\boldsymbol{e}_r$ と $\boldsymbol{e}_\theta$ の 1 次結合で表せ．

問 2. 水平面上の原点 O に，細くて軽い棒の一端が固定されており，棒はこの平面上を O を中心としてなめらかに回転できるようになっている．この棒に通された質量 m のビーズが，ばね定数 $m\omega_0^2$，自然長 ℓ のばねで図 2 に示すように棒に結びつけられていて，棒上を運動するものとする．以下の問に答えよ．ただし，ビーズと水平面の接触，およびビーズと棒の接触はなめらかであるものとし，棒の長さは十分に長く，またビーズは質点として取り扱ってよいものとする．

問 2(a). 極座標 (r,θ) を，$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$ で定義し，ビーズの座標をこれを用いて表すものとする．図 2 に示すように，ビーズが棒から受ける垂直抗力を N として，ビーズの運動方程式を極座標を用いて表せ（ヒント：垂直抗力は問 1 における $\boldsymbol{e}_\theta$ に平行であることに注意し，問 1 の結果を利用してみよ）．

問 2(b). 棒を一定の角速度 $\dot{\theta}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\omega_0$ で強制的に回転させるとき，問 2(a) で求めた運動方程式から，$r(t)$ を時間 t の関数として表せ．ただし，初期条件を $r(0)=\ell$，$\dot{r}(0)=0$ とせよ．

問 2(c). 問 2(b) において，ビーズが棒から受ける垂直抗力 N を時間 t の関数として表せ．

問 2(d). 次に，棒とビーズの接触がなめらかでなく，垂直抗力 N に比例（比例係数 μ）した大きさを持つ動摩擦力が，ビーズの運動方向と反対向きに働く場合を考える．このとき，静止摩擦力の効果で質点が棒に対して静止し続けるようになるまでは，r は次の微分方程式

$$\frac{d^2r}{dt^2}+\sqrt{3}\mu\omega_0\frac{dr}{dt}+\frac{1}{4}\omega_0^2 r=\omega_0^2\ell$$

を満たすことを示せ．ただし，$\dot{\theta}$ が問 2(b) と同じ一定値を取るように棒を強制的に回転させるものとする．

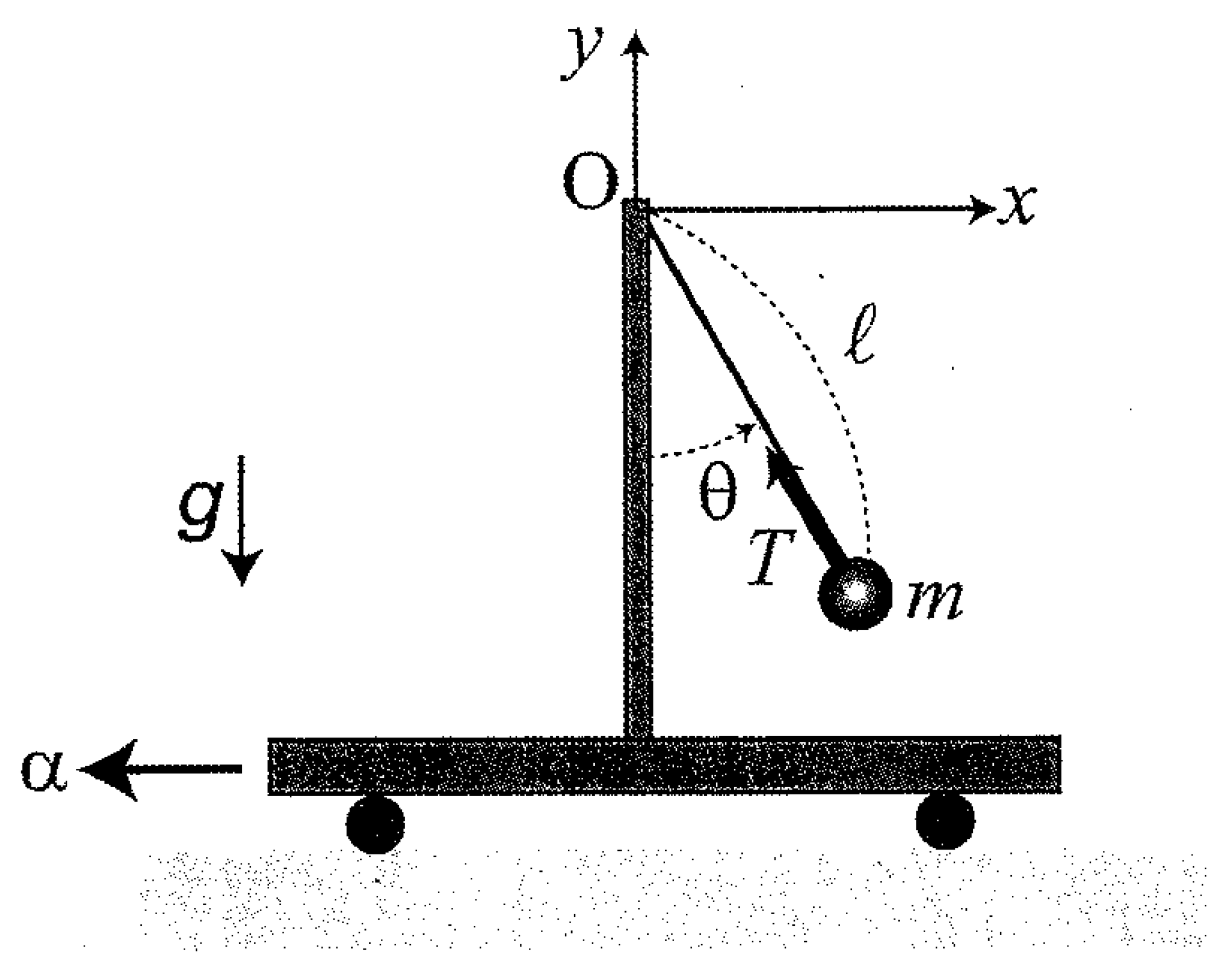

図1

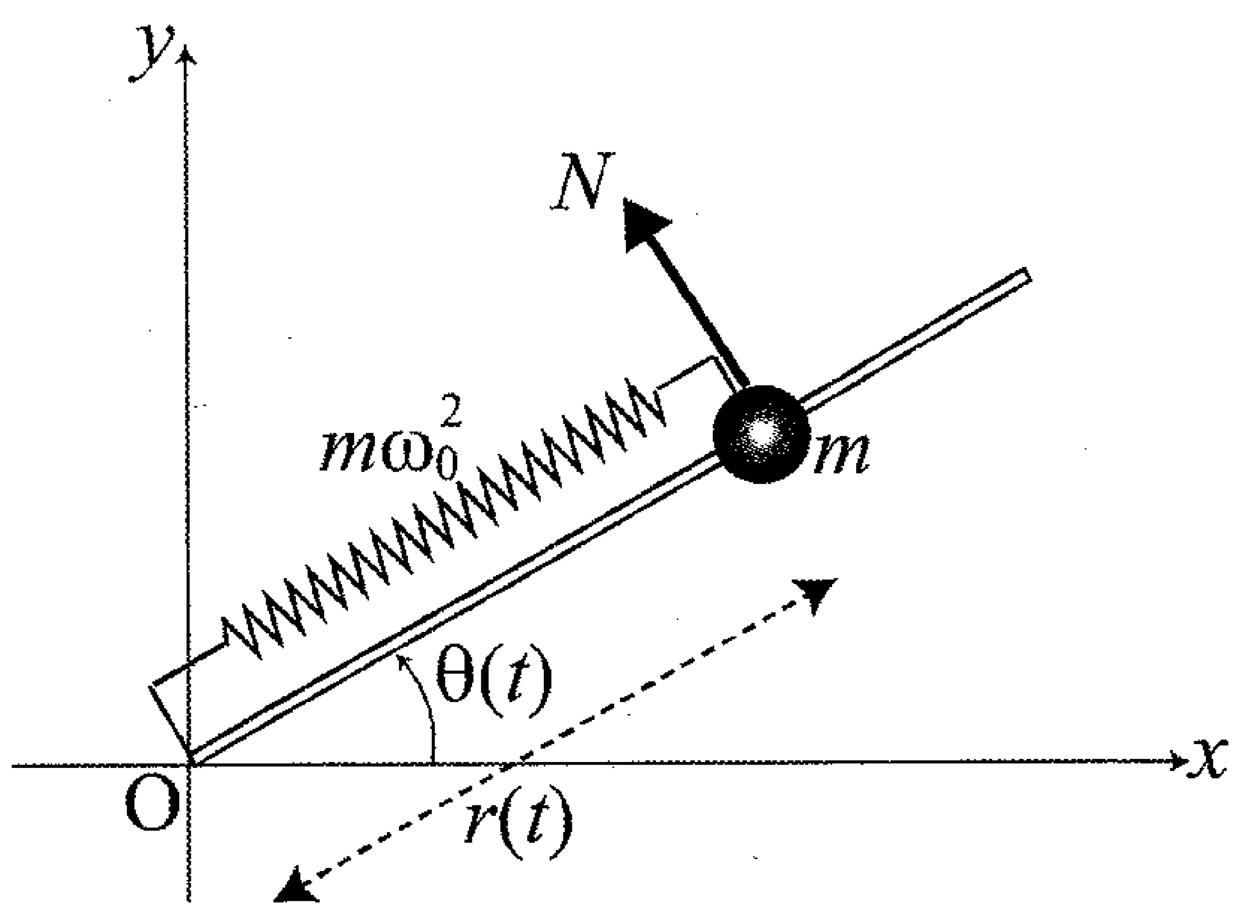

図2

– 問題は以上である –