2011年度 微分積分学 A 演習 1 解答例など　(担当：日野)

前回の講義の補足

(i) 数列 $\{a_n\}$ が α に収束することを，講義では

$$^\forall\varepsilon > 0,\ ^\exists N \in \mathbb{N}\ \text{ s.t. } \underset{\sim\sim\sim}{n \geq N} \Rightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

と定義したが，参考書では

$$^\forall\varepsilon > 0,\ ^\exists N \in \mathbb{N}\ \text{ s.t. } \underset{\sim\sim\sim}{n > N} \Rightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

と定義しており，波線部が異なっている．しかしこの 2 つは同値な命題であり，定義としてはどちらを採用してもよい．(上の命題が真なら下の命題が真であることは明らかで，逆向きは N として 1 つ大きい数を取ればよいから．) Cauchy 列の定義についても同様である．講義中にコメントするのを忘れていたので補足します．また，「$< \varepsilon$」の部分を「$\leq \varepsilon$」に変えても同値な命題になり，この形で使われることも多い．下の **[1-2]** でもう少し詳しく解説しているので参照のこと．この定義に関しては等号が入るか入らないかは結局のところ影響がないのだが，命題によっては本質的な違いが生じることがあるため，等号の有無には敏感になっておくとよい．また，念のため，

$$^\forall\varepsilon > 0,\ ^\exists N \in \mathbb{N}\ \text{ s.t. } ^\forall n \geq N,\ |a_n - \alpha| < \varepsilon$$

と一番上の命題は全く同じ意味である．(記号「$\Rightarrow$」を使わないこの形が個人的には一番わかりやすいと思うのだが，講義では参考書に近い書式にあわせた．)

(ii) 実数の連続性について，「$\mathbb{R}$ の空でない部分集合が上に有界ならば上限を持つ」，「上に有界な単調増加な実数列 $\{a_n\}$ は収束する」を講義で説明したが，このことから双対的な命題「$\mathbb{R}$ の空でない部分集合が下に有界ならば下限を持つ」，「下に有界な単調減少な実数列 $\{a_n\}$ は収束する」も自動的に成り立つことに注意する．(例えば，数列については $\{-a_n\}$ を考えればよい．) この手の事項は頻出するので，今後はいちいち断らないかも知れない．

レポート問題の解説など

レポートの添削は大学院生の TA (ティーチングアシスタント) にお願いしています．私の方でも 1 通り目を通していますが，疑問な点があれば私まで問い合せて下さい．

[1-1] 色々な書き方があると思うが，以下は 1 つの解答例である．

(1) $|a_n| < \dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n}} = \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$ であるから，$\dfrac{1}{2\sqrt{n}} \leq \varepsilon$ ならば不等式 $|a_n| < \varepsilon$ が成立する．$\dfrac{1}{2\sqrt{n}} \leq \varepsilon$ は $n \geq \dfrac{1}{4\varepsilon^2}$ と同値なので，$(*)$ をみたす N としては $\dfrac{1}{4\varepsilon^2}$ 以上の自然数を選べばよい．従って，N の例としては，$\varepsilon = \dfrac{1}{10}, \dfrac{1}{100}, \dfrac{1}{1000}$ のとき，それぞれ 25, 2500, 250000.

(2) 解答例: 正の数 ε を任意にとる．N を $\dfrac{1}{4\varepsilon^2}$ 以上の自然数とするとき，$n \geq N$ ならば

$$|a_n| < \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n}} = \frac{1}{2\sqrt{n}} \leq \frac{1}{2\sqrt{N}} \leq \frac{1}{2\sqrt{1/(4\varepsilon^2)}} = \varepsilon.$$

従って，$\{a_n\}$ は 0 に収束する．

▶ 条件 $(*)$ の同値変形だけで議論しようとしてもうまくいかない．結論を得るのに十分な条件を求めるという，**十分性のみ**が問題とされる状況は今後もしばしば生じるので，注意しておくとよい．

▶ (1) について，最良の N を計算機を利用して調べると，$\varepsilon = \dfrac{1}{10}, \dfrac{1}{100}, \dfrac{1}{1000}$ に対してそれぞれ 21, 2497, 249910 である．上で議論した不等式は一見大雑把に見えるが，実際はかなり良い評価になっている．

[1-2] A: $|a_n - \alpha| + |b_n - \beta|$

B: $|a_n||b_n - \beta| + |a_n - \alpha||\beta| \leq M \cdot \dfrac{\varepsilon}{2M} + \dfrac{\varepsilon}{2(|\beta|+1)} \cdot |\beta| < \left(\dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} =\right)$

(2) について少しコメントしておく．

▶ N の取り方について，

$$n \geq N \Longrightarrow |a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{\underset{\sim\sim\sim\sim}{2(|\beta|+1)}}, \quad |b_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2M} \qquad (\star)$$

というように波線部は少し奇妙な値になっているが，$\dfrac{\varepsilon}{2|\beta|}$ ではなくて，より小さい値の $\dfrac{\varepsilon}{2(|\beta|+1)}$ としているのは，$\beta = 0$ のとき分母が 0 になるのを避けるというだけの理由である．$\beta \neq 0$ のときは $\dfrac{\varepsilon}{2|\beta|}$ で構わないが，場合分けするのも面倒なので一括して処理できるような式にしたというだけのことである．$\dfrac{\varepsilon}{2\max\{|\beta|, 1\}}$ としても構わない．この辺りは趣味の問題である．(評価の仕方によっては，得られる不等式が $|a_nb_n - \alpha\beta| < \varepsilon$ でなく $|a_nb_n - \alpha\beta| \leq \varepsilon$ となるかもしれない．しかしこれでも証明できていることになっている．次項の後半を参照のこと．)

▶ もう少し考察してみる．$(\star)$ の代わりに，単純に

$$n \geq N \Longrightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon, \quad |b_n - \beta| < \varepsilon \qquad (\star\star)$$

という条件で N を定めてみるとどうなるか考えてみよう．元と同様の評価を行うと，

$$\begin{aligned} |a_nb_n - \alpha\beta| &= |a_n(b_n - \beta) + (a_n - \alpha)\beta| \\ &\leq |a_n||b_n - \beta| + |a_n - \alpha||\beta| \\ &< M\varepsilon + \varepsilon|\beta| = K\varepsilon \qquad (K = M + |\beta| \text{ とおいた}) \end{aligned}$$

となる．最後の式が ε ではなく ε の定数倍になってしまったが，実はこれでも証明できている．理由を一言で言えば「最初の ε を ε/K と取り直して議論すればよいから」である．もう少し正確には問 **[1-5]** の主張を用いたことになる．ピンと来ない人はじっくり考えてみるとよい．**K は n に依存しない値**であるところが重要な点である．複雑な証明の場合，このように，最初の方で帳尻を合わせようとせず，最後の式を「定数倍の ε」になるようにして証明終とすることもよくある．同様の理由で，最後は「$<\varepsilon$」でなくて「$\leq\varepsilon$」となってもよい．(「最初の ε を $\varepsilon/2$ と取り直して議論すればよいから．」) この辺りのことは今後の講義でも使っていくことにする．

[1-3] 以下は 1 つの解答例である．他にも方法は色々あると思う．

(1) $M \geq 2a$ となる自然数 M をとる．すると，$n \geq M$ のとき，

$$0 \leq \frac{a^n}{n!} \leq \frac{\overbrace{a\cdot a\cdots a}^{M\text{ 個}}}{1\cdot 2\cdots M}\cdot\frac{a^{n-M}}{\underbrace{M\cdots M}_{n-M\text{ 個}}} \leq \frac{a^M}{M!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-M}.$$

最右辺は $n\to\infty$ のとき 0 に収束するから，はさみうちの原理から $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0.$

▶ a は整数とは限っていない．M をとるところでアルキメデスの原理を用いているのだが (**[1-1]**(2) でもそうだが)，証明ではそこまで言及する必要は普通はない．(この点を誰かに質問されたら，「アルキメデスの原理からです」と答えればよい．)

(2) $(2n)! \geq 1\cdot\overbrace{2\cdot 2\cdots 2}^{n-1\text{ 個}}\cdot\overbrace{n\cdot n\cdots n}^{n-1\text{ 個}}\cdot 2n=(2n)^n$. よって，

$$0 \leq \sqrt[n]{\frac{1}{(2n)!}} \leq \sqrt[n]{\frac{1}{(2n)^n}} = \frac{1}{2n}.$$

最右辺は $n\to\infty$ のとき 0 に収束するから，はさみうちの原理より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{(2n)!}}=0.$

コメント: 「(数式/命題 A) が成り立つ．従って，(数式/命題 B) が成り立つ．」という議論のところで

$$\begin{aligned}&(\text{数式/命題 A})\\ \Longleftrightarrow\ &(\text{数式/命題 B})\end{aligned}$$

のように書く人がいるが，記号 $\Longleftrightarrow$ は**同値 (必要十分条件) であるということを特に主張したいときに用いる**べき記号であり，そういう趣旨でない時に使うのは適切でない[*1]．

*1 議論をフォローする人は「A ならば B」と「B ならば A」の 2 つをチェックするはめになる！ 実際は片方しか必要でないのに．

（数式/命題 A）から（数式/命題 B）は従うが，（数式/命題 B）から（数式/命題 A）は従わないという状況で記号 $\Longleftrightarrow$ を使ってはいけないことはもちろんである．

以上