2011年度 微分積分学A 演習2 解答例など　(担当：日野)

[2-1] (1) 例えば m, n がともに奇数なら,

$$a_m - a_n = -\frac{1}{n+1} + \overbrace{\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right)}^{\text{正}} + \cdots + \overbrace{\left(\frac{1}{m-2} - \frac{1}{m-1}\right)}^{\text{正}} + \overbrace{\frac{1}{m}}^{\text{正}}$$
$$> -\frac{1}{n+1},$$

$$a_m - a_n = \overbrace{\left(-\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right)}^{\text{負}} + \cdots + \overbrace{\left(-\frac{1}{m-1} + \frac{1}{m}\right)}^{\text{負}}$$
$$< 0$$

より $|a_m - a_n| \leq \dfrac{1}{n+1}$. 他の場合も同様.

(2) (1) で m と n の役割を入れ替えると, $m < n$ のとき $|a_m - a_n| \leq \dfrac{1}{m+1}$. 従って, 一般に, 自然数 m, n に対して $|a_m - a_n| \leq \dfrac{1}{\min\{m, n\} + 1}$ が成り立つ. 正の数 ε に対して $N > \dfrac{1}{\varepsilon}$ となるような自然数 N をとると, $m \geq N, n \geq N$ のとき $|a_m - a_n| < \varepsilon$ となるので, $\{a_n\}$ は Cauchy 列である.

[2-2] (1) $^\exists\varepsilon > 0,\ ^\forall N \in \mathbb{N},\ ^\exists m \geq N,\ ^\exists n \geq N,\ |a_n - a_m| \geq \varepsilon$. (あえて) 日本語で書けば,「ある正の数 ε が存在して, 任意の自然数 N に対して, ある $m \geq N$ とある $n \geq N$ が存在して $|a_n - a_m| \geq \varepsilon$ となる.」

- ▶ s.t. をつけるならば, $^\exists\varepsilon > 0$ と $^\exists n \geq N$ の後ろにつける事になるが, 今の場合は余計に煩雑になってしまうので省略して良い.
- ▶「任意の ** が存在して…」と書く人をたまにみるが, こういう記述はあり得ない.
- ▶「$|a_n - a_m| < \varepsilon$」の否定は「$|a_n - a_m| > \varepsilon$」ではなく「$|a_n - a_m| \geq \varepsilon$」であることに注意.
  ※ しかしながら, 命題「$^\exists\varepsilon > 0,\ ^\forall N \in \mathbb{N},\ ^\exists m \geq N,\ ^\exists n \geq N,\ |a_n - a_m| \geq \varepsilon$」と命題「$^\exists\varepsilon > 0,\ ^\forall N \in \mathbb{N},\ ^\exists m \geq N,\ ^\exists n \geq N,\ |a_n - a_m| > \varepsilon$」は同値である. (なぜでしょう？)

(2) 色々な証明方法がある. 以下はその1つ.

証明: $|a_{n+1} - a_n|$ は常に r または $1 - r$ であることに注意する. $\varepsilon = \min\{r, 1-r\}\ (> 0)$ とし, 自然数 N に対して $m = N, n = N + 1$ とすることにより, (1) の答の命題が真であることがわかるので, 数列 $\{a_n\}$ は Cauchy 列でなく, 収束しない.

(裏面へ続く)

[2-3] 定義に従って考えればよい．答は以下の通り．

	最大数	最小数	上限	下限
A	なし	a	b	a
B	3	なし	3	1/2
C	なし	なし	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$
D	なし	なし	3	0
E	なし	0	1	0
F	2/3	なし	2/3	0
G	なし	なし	1	0

D と E について，

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}, 3-\frac{1}{n}\right] \neq \left[\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}, \lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{1}{n}\right)\right], \quad \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n}, n\right) \neq \left(\lim_{n\to\infty}-\frac{1}{n}, 1\right)$$

であることに要注意．E について詳しく説明しておく．まず，定義から

$$E = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n}, n\right) = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, \text{すべての自然数 } n \text{ に対して } x \in \left(-\frac{1}{n}, n\right)\right\}$$

である．$I_n = \left(-\dfrac{1}{n}, n\right)$ とおく．

- $x < 0$ のときは，$n > -\dfrac{1}{x}$ となる自然数 n に対して[*1] $x \notin I_n$ なので[*2] $x \notin E$.
- $0 \leq x < 1$ のときはすべての自然数 n に対して $x \in I_n$ なので $x \in E$. **($0 \in E$ であることに注意.)**
- $x \geq 1$ のときは $x \notin I_1$ なので $x \notin E$.

結局，$E = [0,1)$ である．区間 $(0,1)$ ではない．

同様に考えると，$D = (0,3)\,(\,= \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 3\})$ であることもわかる．

以上

[*1] アルキメデスの原理よりこのような自然数 n は存在する．
[*2] $x < -1/n$ だから．