2011 年度 微分積分学 A 演習 3 略解など　(担当：日野)

[3-1] 答のみ記す.

	集積値全体の集合	$\varlimsup_{n\to\infty} a_n$	$\varliminf_{n\to\infty} a_n$
(1)	$\emptyset$ (空集合)	$+\infty$	$-\infty$
(2)	$\left\{-1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 1\right\}$	1	-1
(3)	閉区間 $[0,1]$	1	0

► (2) で，$\lim_{n\to\infty} a_{6n} = 1$, $\lim_{n\to\infty} a_{6n+1} = 1/2, \cdots$ なので…として集積値全体の集合を答えているものについては，本来はそれ以外に集積値がないことを言っておく必要がある.（そこまできちんと論じている答案はほぼ皆無だったので甘く評価してある）

► (3) は本質的に講義で述べた例と同様.（10 進有限小数の列を 2 進有限小数の列に変えただけ）

[3-2] D'Alembert の判定条件，Cauchy の判定条件の証明を見ればわかる通り（あるいは問 2.7 からといってもよいが)，数列 $\{a_n\}$ が**収束していれば**，命題の仮定の中の $\varliminf_{n\to\infty} a_n$ や $\varlimsup_{n\to\infty} a_n$ は，$\lim_{n\to\infty} a_n$ に置き換えてもよいことにまず注意しておく.

(1) $|a_n|^{1/n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{e} < 1$. 従って $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する.

(2) $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n^2}{3(n+1)^2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{3} < 1$. 従って $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する.

(3) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{4}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{4}{e} > 1$. 従って $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する.

(4) D'Alembert の判定条件や Cauchy の判定条件では判断できないので少し工夫が必要. 1 つの解答例を挙げる. $N \geq 2$ のとき，

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{2N} a_n &= \sum_{m=1}^{N} (a_{2m-1} + a_{2m}) \\
&= \sum_{m=1}^{N} \left\{-\frac{1}{2(2m-1)} + \frac{1}{2m}\right\} && \text{(i)} \\
&\geq \sum_{m=2}^{N} \left(-\frac{1}{3m} + \frac{1}{2m}\right) \qquad (m \geq 2 \text{ のとき } 0 < 3m \leq 2(2m-1) \text{ だから}) && \text{(ii)} \\
&= \sum_{m=2}^{N} \frac{1}{6m}.
\end{aligned}$$

最右辺は $N \to \infty$ のとき $+\infty$ に発散するので，部分列 $\left\{\sum_{n=1}^{2N} a_n\right\}_{N=1}^{\infty}$ も発散する．従って $\left\{\sum_{n=1}^{N} a_n\right\}_{N=1}^{\infty}$ も発散する．

▶ (4) では，「数列が収束すれば，その部分列も収束する」の対偶命題「部分列が発散すれば，もとの数列も発散する」を用いた．もう少しだけ議論を付け加えれば，もとの数列が $+\infty$ に発散していることまで示せる．

▶ 形式的に

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} a_n &= -\cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{6}} + \frac{1}{4} - \cancel{\frac{1}{10}} + \cancel{\frac{1}{6}} - \cancel{\frac{1}{14}} + \frac{1}{8} \cdots \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{1}{16} + \cdots \\ &= \infty\end{aligned}$$

とするのは和の順番を取り換えていることになり間違いである．(これでも発散になっているのは偶然．) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が絶対収束していればこういうやり方が正当化されるが，あいにく今の場合はそうではない．

▶ (i) から (ii) への変形などとても思いつかないという人は次のように考えてみるとよい．まず無限級数の形から $\sum_{n=1}^{2N} a_n$ を考えてみるというのは自然だろう．すると (i) までは辿り着く．これを計算すると $\sum_{m=1}^{N} \frac{m-1}{2m(2m-1)}$ となるが，これ以上は簡単になりそうにない．しかし収束・発散は m が大きいときの挙動が問題なのだから，分子は大体 m, 分母は大体 $2m \cdot 2m$ であると思うと，$\frac{m-1}{2m(2m-1)}$ はほぼ $\frac{m}{2m \cdot 2m} = \frac{1}{4m}$ に等しくなるので，$\sum_{m=1}^{N} \frac{m-1}{2m(2m-1)}$ は $+\infty$ に発散すると予想できる．ここまでくれば後は**不等式で下から評価**すればよい．例えば，不等式 $m-1 \geq m - \frac{m}{2}$ (ただし $m \geq 2$ のとき) および $2m-1 \leq 2m$ を用いて

$$\sum_{m=2}^{N} \frac{m-1}{2m(2m-1)} \geq \sum_{m=2}^{N} \frac{\frac{m}{2}}{4m^2} = \sum_{m=2}^{N} \frac{1}{8m}$$

となり，結論を得る．($m=1$ は外したが収束・発散には無関係なのでこれで証明できている．) もう少し議論を整理して証明をかっこ良く見せるのはお好み次第である．

▶ このように大雑把に大きさを見積もるという考え方は大事である．

▶ 定積分と比較するというのも有効な手法で，何人かはそのように議論していたが，まだ講義では積分について論じていないのでその方法はしばらく封印するという方向でよろしく．

▶ この問では発散が答であったので，部分列が発散することを示せばそれで済んだ．ではもし $\left\{\sum_{n=1}^{2N} a_n\right\}_{N=1}^{\infty}$ が収束するような例の場合はどう議論したらよいだろうか．この場合は直ちに $\left\{\sum_{n=1}^{N} a_n\right\}_{N=1}^{\infty}$ が収束するとは言えない．（簡単な例は，$a_n=(-1)^n$.）このときは $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ であることが $\left\{\sum_{n=1}^{N} a_n\right\}_{N=1}^{\infty}$ が収束するための必要十分条件である．実際，必要条件であることは明らかである（講義で示した）．十分条件であることを示そう．$\alpha = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{2N} a_n$ とする．$\varepsilon>0$ に対して $M\in\mathbb{N}$ をとって，$N\geq M$ ならば $|a_N|<\varepsilon/2$, $\left|\alpha-\sum_{n=1}^{2N} a_n\right|<\varepsilon/2$ となるようにできる．すると，$2M$ 以上の自然数 N に対して，N が偶数ならば $\left|\alpha-\sum_{n=1}^{N} a_n\right|<\varepsilon/2$ であり，N が奇数ならば $N=2N'+1$ $(N'\geq M)$ とすると

$$\begin{aligned}\left|\alpha-\sum_{n=1}^{N} a_n\right| &= \left|\alpha-\sum_{n=1}^{2N'} a_n - a_N\right| \\ &\leq \left|\alpha-\sum_{n=1}^{2N'} a_n\right| + |a_N| \\ &< \varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon\end{aligned}$$

となるので，いずれにせよ $\left|\alpha-\sum_{n=1}^{N} a_n\right|<\varepsilon$ となり，$\left\{\sum_{n=1}^{N} a_n\right\}_{N=1}^{\infty}$ は α に収束する．

[3-3] (1) $\mu = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n\,(<\alpha)$, また自然数 N に対して $l_N = \sup_{n\geq N} a_n$ とする．$r=\dfrac{\mu+\alpha}{2}\in(\mu,\alpha)$ とする．$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n$ の定義より $\lim_{N\to\infty} l_N=\mu$ であるから，$\varepsilon=\dfrac{\alpha-\mu}{2}\,(>0)$ に対して，ある自然数 N が存在して $n\geq N$ ならば $|l_n-\alpha|<\varepsilon$ が成り立つ．従って $n\geq N$ ならば

$$a_n\leq l_n<\alpha+\varepsilon=r.$$

(2) （どのような実数 α に対しても）命題は偽．反例の 1 つは，$a_n=\alpha+\dfrac{1}{n}$.

▶ レポートの添削はかなり甘いが，(1) ではどのように N を取ったか明示してほしいところ．(ε-N 論法の練習として出題しているので.)

▶ (1) と (2) は $<$ か $\leq$ の違いだけであるが，結論は全く異なる．

問題 [2-2](2) の補足: 前回の解答例では Cauchy 列でないことを示すことにより数列の発散を示したが，証明方法はこれに限らない．

(別証明) 数列 $\{a_n\}$ がある実数 α に収束すると仮定して矛盾を導こう．$b_n = a_{n+1} - a_n$ とすると，$\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha - \alpha = 0$ である．しかしながら，任意の n に対して $|b_n| \geq \min\{r, 1-r\} (> 0)$ であるから，これは矛盾である．

以上