2011 年度 微分積分学 A 演習 5 解答例など　(担当：日野)

[5-1] (2) のみ示す．$\delta = \dfrac{1}{700}$ が条件を満たすことを示そう．$|-1-y| < \delta$ のとき，$|y| < 2$ であり，

$$\begin{aligned}|f(-1) - f(y)| &= |-1 - y^3| = |1+y||1-y+y^2| \\ &< \delta(1 + |y| + |y|^2) \le 7\delta = \frac{1}{100}\end{aligned}$$

なので条件を満たす．

- ▶ なぜ $\dfrac{1}{700}$ が出てきたかというと，最初に上の計算をしておいて，最後が $\dfrac{1}{100}$ になるように逆算して δ を定めたのである．
- ▶ むろん $\delta = \dfrac{1}{1000}$ でも $\delta = \dfrac{1}{400}$ でも（正しく議論ができていれば）正解である．
- ▶ もっと丁寧に評価すれば $\delta = \dfrac{1}{301}$ でもよいことが分かるが，上の議論では少し大雑把な評価で済ませたので δ の値は小さめになっている．δ は $\dfrac{1}{300}$ 以上にはとれない．$y = f(x)$ のグラフにおいて点 $(-1,-1)$ における接線を引いてみれば理由が分かる．
- ▶ (2) の答の 1 つの解釈は以下の通り: x を入力値，$f(x)$ を（何かの実験による）出力値とした時，$x = 1$ に対して $f(x)$ をなるべく正確に求めたいとする．(2) の答の意味は，出力誤差を $\dfrac{1}{100}$ 未満にするためには入力誤差が例えば $\dfrac{1}{700}$ 未満であればよいということである．こう考えてみると，関数の連続性を ε-δ で定義するという発想は工学的な見地からも自然なものと思われるが，いかがだろうか．

[5-2] (1) 正の数 ε に対して，$\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$ とすると，$x, y \in (-1,1)$, $|x-y| < \delta$ のとき，

$$|g(x) - g(y)| = |x-y||x+y| < 2\delta = \varepsilon.$$

よって g は区間 $(-1,1)$ で一様連続．

(2) 正の数 ε に対し，$\delta = \dfrac{\varepsilon^2}{4}$ と定める．x, y を $|x-y| < \delta$ をみたす実数とする．

(a) $|x| < \delta$ かつ $|y| < \delta$ のとき，

$$|h(x) - h(y)| \le |h(x)| + |h(y)| < \sqrt{\delta} + \sqrt{\delta} = \varepsilon.$$

(b) (a) でないとき，$|x| \ge \delta$ または $|y| \ge \delta$ で，x と y は同符号となるから，

$$|h(x) - h(y)| = \frac{|x-y|}{\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}} \le \frac{\delta}{\sqrt{\delta}} < \varepsilon.$$

いずれの場合も $|h(x) - h(y)| < \varepsilon$ となる．これより h は $\mathbb{R}$ 上一様連続である．

▶ これも **[5-1]** と同様に，先に示したい式を計算し，適当な不等式で評価しておいて，後で辻褄が合うように δ を定めたのである．

▶ 上の解答例では $\delta = \varepsilon^2/4$ としたが，もう少し手間をかけて論じれば $\delta = \varepsilon^2/2$ でよいことがわかる．($\varepsilon^2/2$ より大きく取ることは無理．)

[5-3] 任意の $\delta > 0$ に対し，$x = \dfrac{1}{\delta}$, $y = x + \dfrac{\delta}{2}$ とすると，$|x - y| < \delta$ であり，さらに

$$|g(x) - g(y)| = \left(x + \frac{\delta}{2}\right)^2 - x^2 \geq \delta x = 1.$$

よって g は $\mathbb{R}$ 上で一様連続ではない．

▶ なぜ上の解答で g が一様連続でないことが示せたことになっているのか，よく考えてみること．

$$^{\exists}\varepsilon > 0,\ ^{\forall}\delta > 0,\ ^{\exists}x \in \mathbb{R},\ ^{\exists}y \in \mathbb{R} \text{ s.t. } |x - y| < \delta,\ |g(x) - g(y)| \geq \varepsilon$$

が成り立つことを，$\varepsilon = 1$，($\delta > 0$ に対して) $x = \dfrac{1}{\delta}$, $y = x + \dfrac{\delta}{2}$ とすることで，$|x - y| < \delta$ および $|g(x) - g(y)| \geq \varepsilon$ を示したわけである．

▶ どこから $1/\delta$, $1/\delta + \delta/2$ という数が出てきたか？ まず，f は $|x|$ が大きいとき変動がどんどん大きくなるので，δ に対して x を十分大きくとればよいはずと見当をつけておく．$r = y - x$ とすると

$$|g(x) - g(y)| = |r^2 + 2rx| = |r||2x + r|$$

なので，r を大体 δ，x を大体 $1/\delta$ とすれば右辺が下からある正の定数で押さえられる．これをふまえて解答を作成した．もちろん ε, x, y の取り方は他にもいろいろあり得る．

▶ ε, x, y をとる順番が大事である．ε を δ に依存して定めてはいけない．

▶ 背理法で証明することも可能である．

以上