2011 年度 微分積分学 A 演習 8 解答例など　(担当：日野)

[8-1] (1) f に Taylor の公式を適用すると，

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{f''(x)}{2!}h^2+\frac{f^{(3)}(x)}{3!}h^3+\frac{f^{(4)}(x+\theta_1 h)}{4!}h^4,$$
$$f(x+h)=f(x)-f'(x)h+\frac{f''(x)}{2!}h^2-\frac{f^{(3)}(x)}{3!}h^3+\frac{f^{(4)}(x+\theta_2 h)}{4!}h^4.$$

ただしここで，θ_1, θ_2 は $0<\theta_1<1,\ 0<\theta_2<1$ をみたすある実数．これより，

$$\begin{aligned}\frac{1}{h^2}\left(\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}-f''(x)\right)&=\frac{f^{(4)}(x+\theta_2 h)}{4!}+\frac{f^{(4)}(x+\theta_2 h)}{4!}\\&\to\frac{f^{(4)}(x)}{4!}+\frac{f^{(4)}(x)}{4!}\quad(h\to 0)\\&=\frac{f^{(4)}(x)}{12}.\end{aligned}$$

(2) f に Taylor の公式を適用すると，

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{f''(x)}{2!}h^2+\frac{f^{(3)}(x+\theta_1 h)}{3!}h^3,$$
$$f(x+2h)=f(x)+f'(x)\cdot 2h+\frac{f''(x)}{2!}(2h)^2+\frac{f^{(3)}(x+\theta_2\cdot 2h)}{3!}(2h)^3,$$
$$f(x+3h)=f(x)+f'(x)\cdot 3h+\frac{f''(x)}{2!}(3h)^2+\frac{f^{(3)}(x+\theta_3\cdot 3h)}{3!}(3h)^3.$$

ただしここで，$\theta_i\ (i=1,2,3)$ は $0<\theta_i<1\ (i=1,2,3)$ をみたすある実数．よって，

$$\begin{aligned}&\frac{1}{h^3}\{f(x+3h)-3f(x+2h)+3f(x+h)-f(x)\}\\&=\frac{27f^{(3)}(x+\theta_3\cdot 3h)}{3!}-\frac{24f^{(3)}(x+\theta_2\cdot 2h)}{3!}+\frac{3f^{(3)}(x+\theta_1 h)}{3!}\\&\to\frac{27f^{(3)}(x)}{3!}-\frac{24f^{(3)}(x)}{3!}+\frac{3f^{(3)}(x)}{3!}\qquad(h\to 0)\\&=f^{(3)}(x).\end{aligned}$$

[8-2] (1), (3) は略．(2) のみ解答を与える．$f(x)=(1+x)^\alpha$, $n=0,1,2,\ldots$ に対して，

$$f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}=n!\binom{\alpha}{n}(1+x)^{\alpha-n}.$$

(α が 0 以上の整数のときもこの式は正しいことに注意する)．従って，Maclaurin 展開は

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n.$$

▶ α が 0 以上の整数のときは，$n > \alpha$ ならば $\binom{\alpha}{n} = 0$ なので，上の無限級数は実際には有限和とみなせる．

▶ この問では剰余項の評価は要求しなかったが，(1)〜(3) のいずれも，$|x| < 1$ ならば剰余項は $n \to \infty$ のとき 0 に収束することが示せ，もとの関数は無限級数（$x = 0$ における Taylor 展開，Maclaurin 展開）で表せる．後期に冪(べき)級数という単元で，関連した内容を論じる予定である．

▶ 用語の使い方について: 通常，「Taylor の公式」とは，（$n+1$ 次の）Taylor 近似式に関する，有限項の和で表された式についての等式を指す．剰余項が $n \to \infty$ のとき 0 に収束する場合は元の関数が無限級数で表されるが，その無限級数を「（$x = a$ における）Taylor 級数」，もとの関数を Taylor 級数で表した式を「（$x = a$ における）Taylor 展開」という．$x = 0$ における Taylor 展開のことを Maclaurin 展開という．

[8-3] (1) $t = \log x$ とおくと，$x = e^t$, $x > 1$ のとき $t > 0$, $x \to \infty$ のとき $t \to \infty$ であるから，$x > 1$ のとき

$$\left|\frac{\log x}{x^\alpha}\right| = \frac{t}{e^{\alpha t}} \leq \frac{t}{1 + \alpha t + \alpha^2 t^2/2} \leq \frac{1}{\alpha + \alpha^2 t/2} \to 0$$

$$(x \to \infty,\ \text{すなわち}\ t \to \infty\ \text{のとき}).$$

従って $\log x = o(x^\alpha)$ $(x \to \infty)$.

(2) Taylor の公式から

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{(\theta x)^5}{120} \quad (\text{ただし}\ \theta\ \text{は}\ 0 < \theta < 1\ \text{をみたす，}x\ \text{に依存するある実数}).$$

従って

$$\left|\frac{x - x^3/6 - \sin x}{x^5}\right| = \left|\frac{\theta^5}{120}\right| \leq \frac{1}{120}$$

となり，最左辺は $x = 0$ のまわりで（実際には $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ 上で）有界となるので，

$$x - \frac{x^3}{6} - \sin x = O(x^5) \quad (x \to 0).$$

以上