2011年度 微分積分学A 演習11略解など　(担当：日野)

[11-1] $t=\log x$ とおいて置換積分・部分積分を行うと，$0<\varepsilon<1$ のとき

$$
\begin{aligned}
\int_\varepsilon^1 x^{-\alpha}\log x\,dx &= \int_{\log\varepsilon}^0 e^{(1-\alpha)t}t\,dt \\
&= \left[\frac{1}{1-\alpha}e^{(1-\alpha)t}t\right]_{\log\varepsilon}^0 - \int_{\log\varepsilon}^0 \frac{1}{1-\alpha}e^{(1-\alpha)t}\,dt \\
&= \frac{1}{1-\alpha}\varepsilon^{1-\alpha}\log\varepsilon - \frac{1}{(1-\alpha)^2}\left[e^{(1-\alpha)t}\right]_{\log\varepsilon}^0 \\
&= \frac{1}{1-\alpha}\varepsilon^{1-\alpha}\log\varepsilon - \frac{1}{(1-\alpha)^2}(1-\varepsilon^{1-\alpha}) \\
&\to -\frac{1}{(1-\alpha)^2} \qquad (\varepsilon\to+0).
\end{aligned}
$$

[11-2] (1) $1-\cos t$ に Taylor の公式を適用すると，

$$1-\cos t = \frac{1}{2}t^2 - \frac{\sin\xi_t}{6}t^3 \qquad (\xi_t \text{ は } 0 \text{ と } t \text{ の間の数}).$$

$|t|\le 1$ のとき $\left|\dfrac{\sin\xi_t}{6}t\right| \le \dfrac{1}{6}$. 従って，$|t|\le 1$ のとき

$$\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{6}t^2 \le 1-\cos t \le \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^2.$$

$t=x^2$ とすれば，$a=1$, $c_1=\dfrac{1}{3}$, $c_2=\dfrac{2}{3}$ として問題の主張が成立する．(もちろん a, c_1, c_2 のとりかたはこれに限らない．)

(実はもっと簡単に証明できるが，汎用的な証明法を述べておいた．)

(2) $\displaystyle\int_0^a \frac{1-\cos(x^2)}{x^s}\,dx$ が収束する s の範囲を求めれば良い．(1) より

$$c_1x^{4-s} \le \frac{1-\cos(x^2)}{x^s} \le c_2x^{4-s} \quad (0<x\le a)$$

であるから，(各辺が正であることにも注意して，)

- $s\ge 5$ のときは，$\displaystyle\int_0^a x^{4-s}\,dx$ が $+\infty$ に発散することと，上式の第1辺 $\le$ 第2辺より，$\displaystyle\int_0^a \frac{1-\cos(x^2)}{x^s}\,dx$ も $+\infty$ に発散．
- $s<5$ のときは，$\displaystyle\int_0^a x^{4-s}\,dx$ が収束することと，上式の第2辺 $\le$ 第3辺より，$\displaystyle\int_0^a \frac{1-\cos(x^2)}{x^s}\,dx$ も収束．

従って，収束する範囲は $s<5$.

[11-3] $\alpha \leq 0$ のときは $\dfrac{1}{n^\alpha}$ が $n \to \infty$ のとき 0 に収束しないので $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ は発散する．以下 $\alpha > 0$ とする．自然数 N に対して

$$\int_1^{N+1} \frac{1}{x^\alpha}\,dx \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha} \leq 1 + \int_1^{N} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$$

であることに注意すると，**[11-2]** と同様の議論により $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ が収束する範囲は $\alpha > 1$ であることがわかる．

8/4 の定期試験についての情報

問題は [1] から [5] まであり，現時点では以下のような内容の問題を出題する予定である．

[1] 数列の極限．
- ▶ 数列が収束するという概念に対して正しい直観が身に付いているかチェック．

[2] 不定積分・定積分の計算問題．
- ▶ 講義・レポート問題で行った計算はちゃんとフォローして，計算できるようになっておくのがよい．

[3] 広義積分の収束・発散の問題．
- ▶ ポイント：不定積分が具体的に計算できなくても，広義積分の収束・発散は判定できることがある．

[4] 関数の一様連続性に関する問題．
- ▶ ε-δ 論法を少々．

[5] 検討中．おそらく，微分法（Taylor の公式を含む）に関するやや発展的な問題．

中間試験より，難易度は微妙に高めである．

後期の授業について

授業の進め方・参考書は前期と同じ．講義内容は以下の順番で行います．

(1) 一様収束，冪級数
(2) 平面と空間の位相
(3) 多変数関数の微分の理論
(4) 多変数関数の積分の理論
(5) パラメータを含む積分の微分・積分
(6) （時間があれば）線積分・面積分

以上