# レポート問題

締め切り:２０１２年１月５日(木)

**問題 1.** $V=\mathbb{C}^3$ とし, $V$ の部分ベクトル空間

$$U=\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \sqrt{-1} \end{pmatrix} \right\rangle$$

に対して

$$U^{\perp}=\{\mathbf{v}\in V \,|\, \mathbf{v}\cdot\mathbf{u}=0, {}^{\forall}\mathbf{u}\in U\}$$

と定める. (内積は標準的な内積をとる.) このとき

$$V=U\oplus U^{\perp}$$

が成り立つことを確認せよ. つまり

$$V=U+U^{\perp}$$
$$U\cap U^{\perp}=\{\mathbf{0}\}$$

を示せ.

**問題 2.** $V=\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ (3 次以下の $x$ の多項式のなす $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間) に内積

$$p\cdot q=\int_0^1 p(x)q(x)\,dx, \quad p,q\in V$$

を定め, $V$ の部分ベクトル空間

$$U=\mathcal{P}_1(\mathbb{R})=\{a_1x+a_0 \,|\, a_1,a_0\in\mathbb{R}\}\subset V$$

に対して

$$U^{\perp}=\{p(x)\in V \,|\, p\cdot q=0, {}^{\forall}q(x)\in U\}$$

と定める. このとき $U^{\perp}$ の基底を一組求めよ. また

$$V=U\oplus U^{\perp}$$

が成り立つことを確認せよ. つまり

$$V=U+U^{\perp}$$
$$U\cap U^{\perp}=\{\mathbf{0}\}$$

を示せ.

下の問題のシュミット直交化法は一般の次元のベクトル空間に対しても正規直交基底を与える．（4 次元の場合が分かれば一般の次元の場合についても推測できるのでレポートでは 4 次元の場合を問題にしている.）

**問題 3** (シュミット直交化法). $\mathbb{C}$ 上の 4 次元のベクトル空間 $V$ に内積 $\cdot$ が定まっているとする．いま $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4\}$ を $V$ の基底とすると, 上から順に

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}_1 &= \mathbf{a}_1 \\
\mathbf{u}_1 &= \frac{1}{\sqrt{\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_1}} \mathbf{b}_1 \\
\mathbf{b}_2 &= \mathbf{a}_2 - (\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 \\
\mathbf{u}_2 &= \frac{1}{\sqrt{\mathbf{b}_2 \cdot \mathbf{b}_2}} \mathbf{b}_2 \\
\mathbf{b}_3 &= \mathbf{a}_3 - (\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 - (\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2 \\
\mathbf{u}_3 &= \frac{1}{\sqrt{\mathbf{b}_3 \cdot \mathbf{b}_3}} \mathbf{b}_3 \\
\mathbf{b}_4 &= \mathbf{a}_4 - (\mathbf{a}_4 \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 - (\mathbf{a}_4 \cdot \mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2 - (\mathbf{a}_4 \cdot \mathbf{u}_3)\mathbf{u}_3 \\
\mathbf{u}_4 &= \frac{1}{\sqrt{\mathbf{b}_4 \cdot \mathbf{b}_4}} \mathbf{b}_4
\end{aligned}$$

と定めていくことにより $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_4\}$ は $V$ の正規直交基底になることを示せ．つまり

$$\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_3 \cdot \mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_4 \cdot \mathbf{u}_4 = 1$$

と

$$\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = 0, \quad i \neq j$$

が成り立つことを示せ.

**問題 4.** $\mathbb{C}^3$ のベクトル

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \sqrt{-1} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{a}_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{-1} \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

から上の問題のようにして標準的な内積に関する正規直交基底 $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ を作れ.

**問題 5.** $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間 $V$ に内積 $\cdot$ が定まっているとし $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ を正規直交基底とする．このとき２個のベクトル

$$a_1\mathbf{u}_1 + a_2\mathbf{u}_2 + \cdots + a_n\mathbf{u}_n$$
$$b_1\mathbf{u}_1 + b_2\mathbf{u}_2 + \cdots + b_n\mathbf{u}_n$$

に対して

$$(a_1\mathbf{u}_1 + \cdots + a_n\mathbf{u}_n) \cdot (b_1\mathbf{u}_1 + \cdots + b_n\mathbf{u}_n) = a_1\bar{b}_1 + \cdots + a_n\bar{b}_n$$

が成り立つことを示せ.

**問題 6.** $\mathbb{C}$ 上の３次元の計量ベクトル空間 $V$ の２組の正規直交基底 $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$, $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ の基底の変換行列 $A = (a_{ij})$

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)A = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$$

はユニタリ行列であることを示せ.（ヒント: 関係式

$$a_{11}\mathbf{u}_1 + a_{21}\mathbf{u}_2 + a_{31}\mathbf{u}_3 = \mathbf{w}_1$$
$$a_{12}\mathbf{u}_1 + a_{22}\mathbf{u}_2 + a_{32}\mathbf{u}_3 = \mathbf{w}_2$$
$$a_{13}\mathbf{u}_1 + a_{23}\mathbf{u}_2 + a_{33}\mathbf{u}_3 = \mathbf{w}_3$$

を使って $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$ が正規直交基底となる条件を $a_{ij}$ で表してみよ.)

**問題 7.**

$$V = \mathbb{C}^2$$

に対して

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 2x_1\overline{y_1} - \sqrt{-1}x_2\overline{y_1} + \sqrt{-1}x_1\overline{y_2} + 2x_2\overline{y_2}$$

とおくとこれは (抽象的な) 内積になることを示せ.

**問題 8.** $n$ 次実正方行列

$$A = (a_{ij}) = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)$$

が直交行列になるための必要十分条件は行列を構成する $n$ 個の縦ベクトル

$$\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$$

が $\mathbb{R}^n$ の標準的な内積に関する正規直交基底になっていることである．これを示せ．（ヒント: 行列の積 ${}^tAA$ の各成分を $a_{ij}$ に関する式で表して, 関係式 ${}^tAA = E_n$ の各成分を見てみる.)

**問題 9.** $n$ 次複素正方行列

$$A = (a_{ij}) = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n)$$

がユニタリ行列になるための必要十分条件は行列を構成する $n$ 個の縦ベクトル

$$\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$$

が $\mathbb{C}^n$ の標準的な内積に関する正規直交基底になっていることである．これを示せ．（ヒント: 行列の積 $A^*A$ の各成分を $a_{ij}$ に関する式で表して, 関係式 $A^*A = E_n$ の各成分を見てみる.）