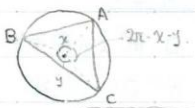
微分積分学 B 7回目-①

例題 15.7

半径1の円に内接するような三角形で

面積が最大となるのは？



$$\Omega\ \left\{ (x,y)\in\mathbb{R}^2 \ \middle|\ \begin{array}{l} 0<x<2\pi \\ 0<y<2\pi \\ 0<2\pi-x-y<2\pi \end{array} \right\}$$

$\hookrightarrow$ $0<x+y<2\pi$.

$f:(x,y)$: $\triangle ABC$の面積

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\{\sin x+\sin y+\sin(2\pi-x-y)\}$$
$$= \frac{1}{2}\{\sin x+\sin y-\sin(x+y)\}$$

まず、臨界点を求める。

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2}\{\cos x-\cos(x+y)\},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2}\{\cos y-\cos(x+y)\}$$

$\frac{\partial f}{\partial x}=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}=0$

$\Leftrightarrow$ $\cos x = \cos y = \cos(x+y)$

$\Updownarrow$

$x=y$ または $\cancel{x=2\pi-y}$

$\hookrightarrow$ $0<x+y<2\pi$に反する ($\because x+y=2\pi$)

$x=y$のとき、 $\cos x=\cos 2x$

よって $x=2x$ または $x=2\pi-2x$

$\hookrightarrow$ 不適 $\quad$ $\hookrightarrow$ $x=\frac{2}{3}\pi$ $(=y)$

よって $\nabla f(x,y)=(0,0)$ $\Leftrightarrow$ $x=y=\frac{2}{3}\pi$

fは$\overline{\Omega}$上連続になるよう拡張できる。

定理15.6より、fは$\overline{\Omega}$上で最大値をもつ。

$\partial\Omega$上では、$f=0$, Ω上では$f>0$

よって、最大値はΩ内でとり、その点は臨界点$(\frac{2}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi)$で

最大値をとる

$f(\frac{2}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi)=\frac{3\sqrt{3}}{4}$

注 fはΩで最小値をとらない。

練習として、

$(\frac{2}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi)$で$f$が極大になることを示してみる。

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{2}\{-\sin x+\sin(x+y)\} \ , \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{2}\{-\sin y+\sin(x+y)\}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = \frac{1}{2}\sin(x+y)$$

$$H\left(\left(\frac{2}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi\right)\right) = -\frac{\sqrt{3}}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

固有値は、$-\frac{\sqrt{3}}{4}(<0)$, $-\frac{3\sqrt{3}}{4}(<0)$

従って、$(\frac{2}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi)$は極大点。

微分積分学 B　7回目-②

§16 陰関数，逆関数

定義 16.1

2変数関数 $f(x,y)$ に対して，ある区間で 関数 $\varphi(x)$ が

$f(x,\varphi(x)) \equiv 0$ を満たすとき，$y=\varphi(x)$ を

$f(x,y)=0$ によって 定まる 陰関数という．

「陰関数 を 表示」という．

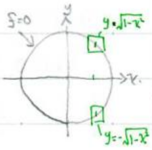
（※ n変数への一般化 → $x\in\mathbb{R}^{n-1}$，$y\in\mathbb{R}$
「区間を「$\mathbb{R}^{n-1}$の領域」とせよ．）

(ex)

$f(x,y) = x^2+y^2-1$

$f=0$　　$-1\le x\le 1$ では，$y=\pm\sqrt{1-x^2}$．

$\varphi_\pm(x) = \pm\sqrt{1-x^2}$



定理 16.2　（陰関数の定理）

$f(x,y)$：領域 D ($\in\mathbb{R}^2$) 上で C^1-級．

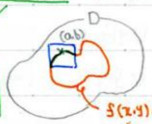
$(a,b)\in D$ において，$f(a,b)=0$，$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\neq 0$．

このとき，$^\exists\delta>0$　$^{\exists 1}\varphi(x)$：$I=(a-\delta,a+\delta)$ 上で C^1-級で

$\varphi(a)=b$，$f(x,\varphi(x))=0$　($^\forall x\in I$)

さらに，$\varphi'(x) = -\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,\varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))}$

$f(x,y)=0$ を解いて I上で $y=\varphi(x)$ と表せる．



$f(x,y)=0$
↓
$y=\varphi(x)$

∃1 … ただ1つ存在する．

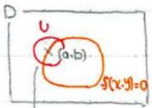
$\frac{\partial f}{\partial x}$ を f_x，$\frac{\partial f}{\partial y}$ を f_y と示す．

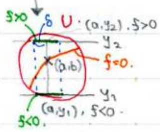
証明

$f_y(a,b)>0$ として 示す．　（<0 のときも 同様）

f_y は 連続だから，(a,b) を中心とする

ある 開円板 U上 で $f_y \ge {}^\exists c>0$





U内で y_1, y_2 を　$y_1<b<y_2$　となるようにとると，

$f(a,y_1) < 0 < f(a,y_2)$

$\underset{f(a,b)}{\overset{\shortparallel}{0}}$　　（∵ $f_y>0$）

$f(x,y_1)$，$f(x,y_2)$ は xについて 連続だから，

$^\exists\delta>0$　s.t.　$^\forall x\in(a-\delta,a+\delta)$　$(=: I)$

$f(x,y_1)<0<f(x,y_2)$

$x\in I$，$y\in[y_1,y_2]$ のとき，　$f_y(x,y)>0$ だから，

$f(x,y)$ は この範囲で xをとめると，　yについて 狭義単調増加．

中間値の定理より，各x に対して，$f(x,y)=0$ となる yがただ1つ存在する．

このyが $\varphi(x)$ となるべきもの．

○φが C^1-級であることを示す．

$y=\varphi(x)$

$y+\Delta y = \varphi(x+\Delta x)$　とすると，

関数 $F(t) = f(x+t\Delta x, y+t\Delta y)$ に平均値の定理を適用すると，

$^\exists\theta\in(0,1)$ s.t.　$F(1) = F(0) + F'(\theta)$

$\underbrace{f(x+\Delta x, y+\Delta y)}_{\overset{\shortparallel}{0}} = \underbrace{f(x,y)}_{\overset{\shortparallel}{0}} + f_x(x+\theta\Delta x, y+\theta\Delta y)\Delta x$
$+ f_y(\quad〃\quad)\Delta y$．

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = -\dfrac{f_x(x+\theta\Delta x, y+\theta\Delta y)}{f_y(x+\theta\Delta x, y+\theta\Delta y)}$ (*)　（U上では，$f_y\ge c>0$）

U上で，f_x は有界　（∵連続だから）

$0<\frac{1}{f_y}\le\frac{1}{c}$　（∵ $f_y\ge c$）

以上より，(*)の右辺は 有界。　特に　$\Delta x\to 0$ ならば　$\Delta y\to 0$．→ φ:連続．

(*) $\xrightarrow[(\Delta y\to 0)]{\Delta x\to 0} -\dfrac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)}$

∴ $\varphi'(x)$ が存在して，$\underbrace{-\dfrac{f_x(x,\varphi(x))}{f_y(x,\varphi(x))}}_{\text{連続関数}}$ に等しい．

→ φ: C^1-級．

(注)　f: C^2-級 なら　φ も C^2-級．

このとき，　$\varphi'' = ?$

$f(x,\varphi(x)) = 0$．

↳ xで微分．　$f_x(x,\varphi(x)) + f_y(x,\varphi(x))\varphi'(x) = 0$．

〃　　⇝ 答．

定理 16.3

$f(x,y,z)$：領域 $D\subset\mathbb{R}^3$ 上で C^1-級．

$(a,b,c)\in D$，　$f(a,b,c)=0$，　$f_z(a,b,c)\neq 0$

このとき，$^\exists V\in\mathbb{R}^2$；$(a,b)$の近傍　s.t.

$^{\exists 1}\varphi(x,y)$：V上 C^1-級で　$\varphi(a,b)=c$，$f(x,y,\varphi(x,y))=0$

$f(x,y,z)=0$ を zについて解いて，$z=\varphi(x,y)$ とかける．

更に，V上で，

$\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = -\dfrac{f_x(x,y,\varphi(x))}{f_z(x,y,\varphi(x))}$

$\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = -\dfrac{f_x(x,y,\varphi(x))}{f_z(x,y,\varphi(x))}$