2011年度 微分積分学B 演習 7　(担当：日野)

以下の問題 [**7-1**]〜[**7-3**] を解き，レポートとして次週 (12/15) の講義時に提出しなさい．
問題 [**7-4**]〜[**7-9**] は次回（以降）の演習の時間に黒板での発表を募る．

[**7-1**] 次の関係式が表す $\mathbb{R}^3$ 内の曲面それぞれについて，点 $(1,1,1)$ における接平面と法線の方程式を求めなさい．

$$(1)\ x^2+y^2-z^3=1 \qquad (2)\ z=xy$$

[**7-2**] $f(x,y)=x+y$, $g(x,y)=\sin x+\cos y-1$ とする．条件 $g(x,y)=0$, $0\le x\le\pi$, $-\dfrac{\pi}{2}\le y\le\dfrac{\pi}{2}$ の下での $f(x,y)$ の最大値及び最小値と，それらをとる x, y の値を求めなさい．

[**7-3**] 曲面 $x^2+y^2+2z^2=4$ と曲面 $z=\cos(x-y)$ の交点 $(1,1,1)$ における共通接線（それぞれの接平面の共通部分）の方程式を求めなさい．

[**7-4**] 曲線 $x^3+y^3-3xy=c$ 上の点 (a,b) における法線が原点 $(0,0)$ を通るという．c を変動させるときこのような点 (a,b) の軌跡を求めなさい．

[**7-5**] $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-2xy+2yz+2zx$, $g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1$ とする．条件 $g(x,y,z)=0$ の下で $f(x,y,z)$ の最大値及び最小値を求めなさい．

[**7-6**] 次の関係式より $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{dz}{dx}$ を求めなさい．
(1) $x^2+y^2+z^2=4$, $x+y+z=1$
(2) $x^2+y^2+z^2=a^2$, $x^2+y^2=2ax$　(a は実数定数)
(3) $x^3+y^3+z^3-3x=0$, $x+y+z=1$

[**7-7**] 次の関係式により y を（局所的に）x の関数と見たとき，y の極値を求めなさい．

$$(1)\ x^3-3xy+y^3=8 \qquad (2)\ (x^2+y^2)^2=5x^2+y^2$$

[**7-8**] α, β, c は実数定数で $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$ とする．平面上の点 (a,b) から直線 $\alpha x+\beta y+c=0$ までの最短距離を，Lagrange の未定乗数法を用いて求めなさい．

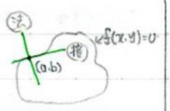
[**7-9**] Lagrange の未定乗数法を用いて，条件 $g(x,y)=0$ の下での $f(x,y)$ の最大値・最小値があればそれらを求めなさい．
(1) $g(x,y)=x+y+1$,　$f(x,y)=x^2+y^2$
(2) $g(x,y)=x^2+y^2-1$,　$f(x,y)=x^3+y^3$
(3) $g(x,y)=x^3+y^3-3xy$,　$f(x,y)=x^2+y^2$　(ただし $-1\le x\le 2$, $-1\le y\le 2$ とする)

No.

Date

微分積分学 B　7回目-③　/8回目-①

曲線，曲面.



$f(x,y)=0$. を考える.　(f: C^1-級)

$f(a,b)=0$ とする.

$f_y(a,b) \neq 0$ と仮定すると，陰関数の定理より.

a の近傍で　$y=\varphi(x)$ と表せる.

(a,b) における接線の式は.　$y-b=\varphi'(a)(x-a)$

$\hookrightarrow -\dfrac{f_x(a,b)}{f_y(a,b)}$

分母を払うと.　$f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)=0$

$\hookrightarrow$ $\nabla f(a,b) \neq (0,0)$ なら OK!

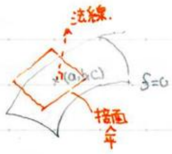
(a,b) における法線　:　$y-b=-\dfrac{1}{\varphi'(a)}(x-a)$

$f_y(a,b)(x-a)-f_x(a,b)(y-b)=0$

$$\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} f_x(a,b) \\ f_y(a,b) \end{pmatrix}\quad (t: \text{パラメータ})$$

$$= t\,\nabla f(a,b)$$

曲面.



$f(x,y,z)=0$

$\downarrow$ $f(a,b,c)=0$

$z=\varphi(x,y)$　　($f_z(a,b,c) \neq 0$ とする)

(a,b,c) における接平面 は.

$$z=c+\frac{\partial\varphi}{\partial x}(a,b)(x-a)+\frac{\partial\varphi}{\partial y}(a,b)(y-b)$$

$$=c-\frac{f_x}{f_z}(a,b,c)(x-a)-\frac{f_y}{f_z}(a,b,c)(y-b)\quad (\because \text{定理 16.3})$$

整理して.

$$f_x(a,b,c)(x-a)+f_y(a,b,c)(y-b)+f_z(a,b,c)(z-c)=0$$

— 接平面の式

$\nabla f(a,b,c) \neq 0$ なら OK!

法線ベクトルは,

$$\begin{pmatrix} f_x(a,b,c) \\ f_y(\ \ \text{〃}\ \ ) \\ f_z(\ \ \text{〃}\ \ ) \end{pmatrix} = \nabla f(a,b,c)$$

よって 法線の式は

$$\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \\ z-c \end{pmatrix} = t\,\nabla f(a,b,c)\qquad (t: \text{パラメータ})$$

- 条件付き最大・最小.

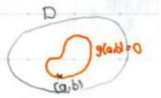
例 16.4

条件　$x^2+y^2-1=0$ の下で　$2x^2-xy+y^2$ の 最大値・最小値は?

$\hookrightarrow y=\pm\sqrt{1-x^2}$ — 代入

$\hookrightarrow$ 具体的に解けないときは?

定理 16.5 (Lagrange の 未定乗数法)



f,g : $\mathbb{R}^2$ の領域 D上で C^1-級.

$(a,b)\in D$, $\nabla g(a,b) \neq 0$ とする.

(a,b) が $g(x,y)=0$ という条件下での $f(x,y)$ の極大点 or 極小点.

$\Rightarrow$ $\underset{\text{自明}}{g(a,b)=0}$, $^{\exists}\lambda\in\mathbb{R}$ s.t. $\nabla f(a,b)=\lambda\nabla g(a,b)$

$\Leftrightarrow$ $F(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda g(x,y)$ とするとき.

$^{\exists}\lambda$ s.t. $\nabla F(a,b,\lambda)=0$.

$$\left(\because\ \begin{aligned} f_x(a,b)-\lambda g_x(a,b)&=0 \\ f_y(a,b)-\lambda g_y(a,b)&=0 \\ -g(a,b)&=0. \end{aligned}\right)$$

例 16.4 への適用.

$g(x,y)=x^2+y^2-1$, $f(x,y)=2x^2-xy+y^2$

$\nabla g(x,y)=(2x,2y)\neq(0,0)$　(if $g(x,y)=0$)

$\nabla f(x,y)=(4x-y,-x+2y)$

$S=\{(x,y)\mid g(x,y)=0\}$ は 有界閉集合 , f は S上で 連続

(* g が連続 → 閉集合. は一般に言える

$g(x_n,y_n)=0$, $(x_n,y_n)\in S$.

$n\to\infty$, g 連続より. $(x_n,y_n)\to(x,y)$

$g(x,y)=0$　$\therefore$ $(x,y)\in S$.)

よって. f は S上で 最大値. と 最小値をとる.

それらをとる点は S上での 極大点, 極小点である

その点を (a,b) とすると. 定理 16.5 より.

$$\begin{cases} g(a,b)=0 \\ \nabla f(a,b)=\lambda\nabla g(a,b) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2+b^2-1=0 & -① \\ 4a-b=\lambda\times 2a & -② \\ -a+2b=\lambda\times 2b & -③ \end{cases}$$

②, ③ より.

$$\begin{pmatrix} 4-2\lambda & -1 \\ -1 & 2-2\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$(a,b)\neq(0,0)$ なので.　$\det\begin{pmatrix} 4-2\lambda & -1 \\ -1 & 2-2\lambda \end{pmatrix}=0$

これを解くと.　$\lambda=\dfrac{3\pm\sqrt{2}}{2}$

$$\lambda=\frac{3+\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a=\pm\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}},\ b=\mp\frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}} \Rightarrow f(a,b)=\frac{3+\sqrt{2}}{2}.$$

$$\lambda=\frac{3-\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a=\pm\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}},\ b=\mp\frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}} \Rightarrow f(a,b)=\frac{3-\sqrt{2}}{2}$$

微分積分学 B　8回目-②

定理 16.5の証明

$\nabla g(a,b) \neq (0,0)$ より, $g_x(a,b) \neq 0$ or $g_y(a,b) \neq 0$.

$g_y(a,b) \neq 0$ として示す. ($g_x(a,b) \neq 0$ のときも同様)

陰関数定理より, $^\exists\varphi$: aの近傍で C^1-級で

$$\varphi(a)=b,\ \underline{g(x,\varphi(x))=0}.$$

$g(x,y)=0$を解いて, $y=\varphi(x)$と表せる.

$f(x,\varphi(x))$ は $x=a$で極大 (または極小)

$$\frac{d}{dx}\left(f(x,\varphi(x))\right)\Big|_{x=a} = 0$$

$$\left(f_x(x,\varphi(x)) + f_y(x,\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\right)\Big|_{x=a} = 0.$$

$$f_x(a,b) + f_y(a,b)\times\boxed{\varphi'(a)} = 0.\qquad \varphi'(a) = -\frac{g_x(a,b)}{g_y(a,b)}$$

よって,

$$\begin{pmatrix} f_x(a,b) \\ f_y(a,b) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} g_x(a,b) \\ g_y(a,b) \end{pmatrix} \qquad \left(\lambda = -\frac{f_y(a,b)}{g_y(a,b)}\right)$$

定理 16.6 (陰関数の定理2)

f, g : $\mathbb{R}^3$の領域D上でC^1-級.

$(a,b,c) \in D$ で, $f(a,b,c)=0$, $g(a,b,c)=0$

$$J = \det\begin{pmatrix} f_y(a,b,c) & f_z(a,b,c) \\ g_y(a,b,c) & g_z(a,b,c) \end{pmatrix} \neq 0 \text{ とする。}$$

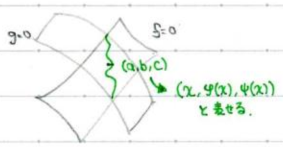
⇒ $^\exists I$: aを内部に含む区間, $^\exists\varphi(x)$, $^\exists\psi(x)$, I上 C^1-級.

s.t. $\varphi(a)=b$, $\psi(a)=c$.

$$⊛\begin{cases} f(x,\varphi(x),\psi(x)) = 0 \\ g(x,\varphi(x),\psi(x)) = 0 \end{cases} \quad (x \in I)$$

更に

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} f_z & f_x \\ g_z & g_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_y & f_z \\ g_y & g_z \end{vmatrix}},\qquad \frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} f_y & f_z \\ g_y & g_z \end{vmatrix}},\quad x\in I.$$



⊛ をxで微分.

$$\begin{cases} f_x + f_y\times\varphi' + f_z\times\psi' = 0 \\ g_x + g_y\times\varphi' + g_z\times\psi' = 0. \end{cases} \xrightarrow{\text{解く}} \begin{cases} \varphi' = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \cdots \\ \psi' = \frac{\partial\psi}{\partial x} = \cdots \end{cases}$$

証明

$J \neq 0$より, $f_y(a,b,c) \neq 0$ 又は $f_z(a,b,c) \neq 0$.
こちらの場合を考える

定理16.3より,

$^\exists F(x,y)$: (a,b)の近傍で C^1-級.

st. $f(x,y,F(x,y))=0$, $F(a,b)=c$.

$f(x,y,z)=0$ が $z=F(x,y)$ と解ける.

$G(x,y) = g(x,y,F(x,y))$ とおく.

$$G_y = g_y + g_z \times F_y \qquad F_y = -\frac{f_y}{f_z}\ (\because \text{定理}16.3)$$

$$= \frac{g_y f_z - g_z f_y}{f_z}$$

$$G_y(a,b) = \frac{J}{f_z} \neq 0.$$

Gに定理 16.2を適用して,

$^\exists I$: aを内部に含む区間, $^\exists\varphi(x)$: I上 C^1-級.

s.t. $G(x,\varphi(x)) = 0$ $(x\in I)$ ← $G(x,y)=0$ が $y=\varphi(x)$ と解ける.

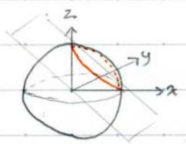
$\varphi(a)=b$.

$\psi(x) = F(x,\varphi(x))$ とおくと, これらは条件を満たす.

例 16.7

$a>0$: 定数.

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = a^2 \\ x+y+z = a. \end{cases}$$



これを y, zについて (局所的に) 解いて, xの関数とみたときの導関数は?

両辺を xで偏微分.　$y=\varphi(x)$, $z=\psi(x)$

$$\begin{cases} 2x + 2y\frac{\partial y}{\partial x} + 2z\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ 1 + \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{x-z}{z-y} \\ \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y-x}{z-y} \end{cases} \qquad \left(\leftarrow \varphi'(x) = \frac{x-\psi(x)}{\psi(x)-\varphi(x)}\right)$$

微分積分学B 8回目-5

定理 16.8

$D \subset \mathbb{R}^n$：領域．　$1 \le p < n$, $m = n-p$ とおく．

$(x,y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \cong \mathbb{R}^n$

$F_1, \cdots, F_p$; D上 C^1-級

$F_j(a,b) = 0$, $j = 1,2,\cdots,p$ $(a \in \mathbb{R}^m,\ b \in \mathbb{R}^p)$

$$\det \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(a,b) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_p}(a,b) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_p}{\partial y_1}(a,b) & \cdots & \frac{\partial F_p}{\partial y_p}(a,b) \end{pmatrix}}_{\left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j}(a,b)\right)_{i,j=1}^{p}} \neq 0$$

(Jacobi 行列式)

$\to \left|\frac{\partial(F_1,\cdots,F_p)}{\partial(y_1,\cdots,y_p)}\right|$ と表す．

このとき，a の近傍 $U \in \mathbb{R}^m$, b の近傍 $V \in \mathbb{R}^p$ がとれて

$x \in U$ に対し，方程式

$F_j(x,y) = 0$　$j = 1,\cdots,p$ を満たす $y \in V$ が一意的に定まる．

これを $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \cdots, \varphi_p(x))$ とするとき．

各 φ_i は C^1-級で，

$$\underbrace{\frac{\partial(\varphi_1,\cdots,\varphi_p)}{\partial(x_1,\cdots,x_m)}}_{(p,m)\text{行列}} = -\underbrace{\left(\frac{\partial(F_1,\cdots,F_p)}{\partial(y_1,\cdots,y_p)}\right)^{-1}}_{(p,p)\text{行列}} \cdot \underbrace{\frac{\partial(F_1,\cdots,F_p)}{\partial(x_1,\cdots,x_m)}}_{(p,m)\text{行列}}$$

後半の証明．

$x = (x_1, \cdots, x_m)$

$$F_j(x_1, \cdots, x_m, \overbrace{\varphi_1(x_1,\cdots,x_m)}^{y_1}, \cdots, \overbrace{\varphi_p(x_1,\cdots,x_m)}^{y_p}) = 0$$

$k = 1,2,\cdots,m$ として，x_k で偏微分　$(j=1,\cdots,p)$

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_k} + \frac{\partial F_j}{\partial y_1} \times \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_k} + \cdots + \frac{\partial F_j}{\partial y_p} \times \frac{\partial y_p}{\partial x_k} = 0$$

左辺は (p,m)-行列の

$$\frac{\partial(F_1,\cdots,F_p)}{\partial(x_1,\cdots,x_m)} + \left(\frac{\partial(F_1,\cdots,F_p)}{\partial(y_1,\cdots,y_p)}\right)\left(\frac{\partial(\varphi_1,\cdots,\varphi_p)}{\partial(x_1,\cdots,x_m)}\right)$$

の (j,k) 成分．